目　录

第一章　排列与组合

§1　加法法则与乘法法则

1. 引论

组合数学是一既古老而又年轻的数学分支．说它古老，因为它所研究的问题有的可追溯到很久很久以前．然而，它之所以形成一新的分支，那还是最近若干年的事，是受到电子计算机蓬勃发展影响的结果．

什么是"组合数学"？要给它下一个正确的定义是不容易的．它还在发展中，本书讨论的内容实际上是属于"组合分析"范畴．

组合分析研究的主要内容是计数和枚举．即计算具有某种特性的对象有多少，并进而把它完全列举出来．

"计数"在许多方面有其重大作用，比如概率论，要计算发生具有某种性质的事件的概率等于多少，往往首先要计算出具有该性质的事件的数目；又如物理学家要研究物质的物理性质，就要计算电子被分配在不同能级的不同状态数有多少．对于计算机科学工作者，计数还有其特殊的意义：计算机科学是研究算法的一门科学，必须要对算法所需要的计算量和存储单元作出估计，即所谓算法的时间复杂性和空间复杂性分析，这属于"组合算法"的研究内容．组合分析和组合算法的关系亦如数学分析和计算方法的关系，组合分析是组合算法的基础，即为算法与算法分析作准备．

2. 加法法则与乘法法则

加法法则与乘法法则是在计数研究中最常用也是最基本的两个法则。以下设事件 A 与事件 B 是不同的两类事件。

(a) 加法法则：

设事件 A 有 m 种产生方式，事件 B 有 n 种产生方式，则"事件 A 或事件 B"有 $m+n$ 种产生方式。

例如大于零而比 10 小的偶数有 4 个，即(2,4,6,8)；大于零而小于 10 的奇数有 5 个，即(1,3,5,7, 9)；则大于零小于 10 的整数有 $4+5=9$ 个，即(1,2,3,4,5,6,7,8,9)。这里事件 A 指的是大于零小于 10 的偶数；事件 B 指的是大于零小于 10 的奇数。大于零小于 10 的整数，不外乎或为偶数或为奇数两种可能，即属于 A 或属于 B。

(b) 乘法法则：

若事件 A 有 m 种产生方式，事件 B 有 n 种产生方式，则"事件 A 与事件 B"有 mn 种产生方式。

例 1. 设一个符号由两个字符组成，第 1 个字符有 a,b,c,d,e 五种方式，第 2 个字符有 1,2,3 三种方式。则根据乘法法则，该符号具有 $5\times 3=15$ 种方式。即

$$a1,\ b1,\ c1,\ d1,\ e1,$$
$$a2,\ b2,\ c2,\ d2,\ e2,$$
$$a3,\ b3,\ c3,\ d3,\ e3.$$

例 2. 从 A 到 B 有 3 条不同的道路，从 B 到 C 有 2 条不同的道路，则从 A 经 B 到 C 的道路数

$$n=3\times 2=6.$$

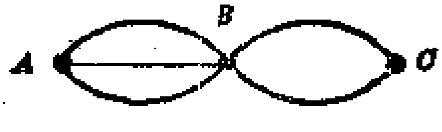


图 1-1-1

例 3. 求比 10000 小的正整数中含有数字 1 的数的个数。

解: 所有由{0,2,3,4,5,6,7,8,9}9 个数字组成的每一位都有 9 种出现方式,根据乘法法则,由 9 个数字组成的 4 位数个数等于 $9\times9\times9\times9=81^2=6561$,其中 0000 不属于正整数。故比 10000 小不含数字 1 的 4 位正整数个数等于 $6561-1=6560$。

所以小于 10000 含有数字 1 的数的个数为 $9999-6560=3439$。

§2 排列与组合

定义: 从 n 个不同的元素中,取 r 个按次序排列,称为从 n 中取 r 个排列,其排列数记以 $P(n,r)$。

定义: 从 n 个不同元素中,取出 r 个而不考虑其次序时,称为从 n 个中取 r 个组合,其组合数记以 $C(n,r)$,或记以 $\binom{n}{r}$。

例如从 100 个成员中选出 20 人编成一小组,不必考虑先后次序,所以是一个组合问题,共有 $C(100,20)$ 种方案。如若考虑 100 名选手中选出 20 名依顺序排成一个队,则有考虑次序的必要,故是排列问题,共有 $P(100,20)$ 种方案。

例. 从 A,B,C,D 中取 3 个组合,则有以下几种组合形式:$\{A,B,C\}$,$\{A,B,D\}$,$\{A,C,D\}$,$\{B,C,D\}$。若从 A,B,C,D 中取 3 个排列,则上面所得到的 4 组,再加以排列,得

$$\begin{array}{llllll}ABC, & ACB, & BAC, & BCA, & CAB, & CBA,\\ ABD, & ADB, & BAD, & BDA, & DAB, & DBA,\\ ACD, & ADC, & CAD, & CDA, & DAC, & DCA,\\ BCD, & BDC, & CBD, & CDB, & DBC, & DCB.\end{array}$$

从 n 个中取 r 个排列的典型模型是把 n 个有标志的球,取 r 个放到 r 个有区别的盒子里,每盒一个,如下列的 r 个盒子:

$$\boxed{(1)} \quad \boxed{(2)} \quad \cdots \quad \boxed{(r)}$$

供选取球数： n 个　$n-1$ 个 $\cdots$ $n-r+1$ 个

如上图所示，第一个盒子有 n 个球可供选取，第 2 个盒子仅有 $(n-1)$ 个球可供选取，……，最后一个盒子则只有 $n-r+1$ 个球可供选择。根据乘法法则，应有

$$P(n,r)=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)=\frac{n!}{(n-r)!}. \tag{1-2-1}$$

(1-2-1)是 $P(n,r)$ 的计算公式，当 $r=n$ 时有

$$P(n,n)=n!.$$

如果球有标志，盒子是完全一样的，而且不考虑其次序，则是从 n 个取 r 个的组合问题。即组合的典型问题是把 n 个有标志的球，取 r 个放到 r 个无区别的盒子里，每盒一个。自然也可以看作是取 r 个无标志的球，放到 n 个有区别的盒子，每盒一球的方案数(不考虑次序)。对每一个方案再考虑盒子的排列次序，可得 $P(n,r)$ 与 $C(n,r)$的关系：

$$P(n,r)=r!C(n,r),$$

$$\therefore \quad C(n,r)=\frac{P(n,r)}{r!}. \tag{1-2-2}$$

下面举出若干例子，通过它能熟练灵活而且正确地掌握排列组合、加法法则及乘法法则等概念。

例 1. 有 5 本日文书，7 本英文书，10 本中文书，①从中取两本不同文字的书，问有多少种方案？②若取两本相同文字的，又有多少种方案？③任取两本，不问是否相同文字，有多少种方案？

解： ①取两本不同文字，可以有日英，中日，中英三种不同的组合法。根据乘法法则有：

日、英各一本的方案数 $=5\times 7=35$ 种，

中、日各一本的方案数 $=10\times 5=50$ 种，

中、英各一本的方案数 $=10\times7=70$ 种。

依据加法法则可得：

取两本不同文字的方案数 $N_1=35+50+70=155$ 种。

② 取两本相同文字的，可有两本日文，两本英文，两本中文三种，根据加法法则得

$$N_2=C(5,2)+C(7,2)+C(10,2)$$
$$=10+21+45=76\text{ 种}.$$

③ 因为不问是什么文字，相当于从 22 本书中取 2 本组合，故有方案数为

$$N_3=C(22,2)=\frac{22\times21}{2}=231\text{ 种}.$$

或根据加法法则得 $N_3=N_1+N_2=155+76=231$ 种。

例 2. 从 1～300 之间任取 3 个不同的数，使得这 3 个数的和正好被 3 除尽，问共有几种方案？

解： 被 3 除的余数不外乎 ①余 0，即被 3 除尽；②余 1；③余 2。故 1～300 的 300 个数可分成 3 组：

$$A=\{1,4,7,\cdots,298\};$$
$$B=\{2,5,8,\cdots,299\};$$
$$C=\{3,6,9,\cdots,300\}.$$

显然，集合 A 的数被 3 除余 1，集合 B 的数被 3 除余 2，集合 C 的数被 3 除尽。

任取三个数其和正好被 3 除尽的有如下四种情况：

① 三个数同属于集合 A，应有 $C(100,3)$ 种方案；

② 三个数同属于集合 B，应有 $C(100,3)$ 种方案；

③ 三个数同属于集合 C，应有 $C(100,3)$ 种方案；

④ 三个数分别属于集合 A,B,C，根据乘法法则应有 100^3 种方案。

根据加法法则，任取三个不同的数，它的和正好被 3 除尽的方

案数应为

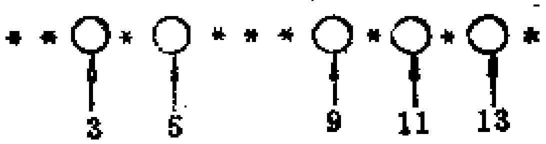
$$N = 3C(100,3) + 100^3 = 3 \times \frac{100 \times 99 \times 98}{3 \times 2 \times 1} + 1000000$$

$$= 3 \times 161700 + 1000000 = 485100 + 1000000$$

$$= 1485100.$$

例 3. 某车站有 1 到 6 六个入口处，每个入口处每次只能进一个人，问一小组 9 个人进站的方案数有多少？

解法 1: 若把从第 1 入口处到第 6 入口处依入口顺序排列，可得 9 个人的一种排列，可是哪几个人从哪个入口处入口的讯息消失了．为此相邻两个入口的人员之间加入一个标志，当然标志是没有区别的，关键在于标志所在的位置．故问题导至若 14 个元素中有 5 个元素无区别，9 个不相同，求其不相同的排列数．例如从 1—14 的 14 个数中任取 5 个，设为(3,5,9,11,13)，对应一种入口顺序示意图：



其中○为标志，**…*为 9 个人的一种排列，可见排列的前两个人从第 1 入口处入口，第 3 个人从第 2 个入口处入口，…．

$$\text{故进站的方案数 } N = 9!C(14,5) = \frac{14!}{5!9!}9!$$

$$= \frac{14!}{5!} = 726485760.$$

解法 2: 和解法 1 相同，在相邻两入口处入口的人员之间加一个标志，问题导至 14 个对象的全排列中，由于其中 5 个标志是无区别的，故其重复度为 5!．于是得：

$$\text{进站的方案数} \quad N = 14!/5!.$$

解法 3: 第 1 个人有 6 种选择方案，即可从六个入口处中的

一个入口。第2个人则有7种选择方案，因为他选择和第1个人相同的入口处时，还有在第1人的前面进站还是在第1个人的后面进站之分。同样的道理，第3个人则有8种选择，……。依此类推，第9个人有14种选择方案。根据乘法法则可得：

进站的方案数 $N=6\times7\times8\times9\times10\times11\times12\times13\times14$。

例4. 求能除尽1400的正整数数目(1除外)。

解: $1400=2^3 5^2 7$。

故除尽1400的数应为

$$2^l 5^m 7^n,$$

其中 $0\leqslant l\leqslant3$, $0\leqslant m\leqslant2$, $0\leqslant n\leqslant1$，但排除 $l=m=n=0$。根据乘法法则可得，除尽1400的数的数目应为

$$N=(3+1)\times(2+1)\times(1+1)-1$$
$$=4\times3\times2-1=23。$$

例5. 求5位数中至少出现一个6，而被3整除的数的个数。

因 k 位十进制数 $p_1p_2\cdots p_k$ 被3整除的充要条件是 $p_1+p_2+\cdots+p_k$ 被3整除，根据这个道理分别讨论如下：

解法1: ①从左向右计，最后一个6出现在第5位，即 $p_5=6$。第2,3,4位数可以是0,1,2,3,4,5,6,7,8,9十数字之一。但第1位数不能任意，为了保证5位数之和被3整除，p_1 只有3种可能。根据乘法法则，5位数中最后一位是6，而被3整除的数有 $3\times10^3=3000$ 个。

② 最后一个6出现在第4位，即 $p_4=6$。第5位数 p_5 只有9种可能；第2，3位各有10种可能，为了保证被3整除，第1位数 p_1 有3种方案，根据乘法法则可得，属于这一类的5位数有 $3\times10^2\times9=2700$ 个。

③ 最后一个6出现在第3位，即 $p_3=6$。被3整除的数应有 $3\times10\times9^2=2430$ 个。

④ 最后一个 6 出现在第 2 位，被 3 整除的数应有 $3\times 9^3=2187$ 个。

⑤ 第 1 位 $p_1=6$. 而被 3 整除的数应有 $3\times 9^3=2187$ 个。

根据加法法则，5 位数中至少出现一个 6 而被 3 整除的数应有 $3000+2700+2430+2187+2187=12504$ 个。

解法 2: 5 位数共 90000 个，其中被 3 整除的有 30000 个。

30000 个被 3 整除的数中不出现 6 的数，第 1 位有 1，2，3，4，5，7，8，9 八种可能；第 2，3，4 位则有 9 种可能；最后一位有 3 种可能。故 5 位数中被 3 整除而不出现 6 的数应有

$$3\times 8\times 9^3=17496 \text{ 个.}$$

因此 5 位数中至少出现一个 6 而被 3 整除的数应有

$$30000-17496=12504 \text{ 个.}$$

例 6. 求 1000! 的末尾有几个零。

$1000!=1000\times 999\times 998\times\cdots\times 3\times 2\times 1$，此问题在于求把 1000! 分解成素数的乘积时，2 和 5 的幂是多少？末尾的零的个数等于 2 和 5 的幂中较小的一个。故问题导至对从 1 到 1000 的整数中求是 2^k 和 5^l 型数倍数的数的个数。

不超过 1000 的正整数中是 5 的倍数的数共 200 个，其中有 40 个是 $25=5^2$ 的倍数，40 个中又有 8 个是 5^3 的倍数，8 个中还有 1 个是 5^4 的倍数。

故若乘积 1000! 分解成素数的乘积，其中 5 的幂应为 $200+40+8+1=249$。

不难判定其中 2 的幂必然超过 249，故 1000! 的末尾有 249 个零。

§3 一一对应

“一一对应”概念在数学研究中经常见到。组合数学在研究计

数问题时，更是常用这种办法来简化我们的计算。比如已知事件 A 和事件 B 一一对应，要对事件 A 计数时，可改为对事件 B 计数，假如事件 B 的计数比 A 容易，则比较困难的事件 A 的计数从而获得解决。下面先举几个例个，在以后的讨论中还将不止一次地用到类似的办法。

例 1. 设某地的街道把城市分割成矩形方格，每个方格叫它做块。某甲从家里出发上班，向东要走过 m 块，向北要走过 n 块。问某甲上班的路径有多少种？

问题可化成图 1-3-1 的方格图，每格一单位，求从(0, 0)点到(m, n)点的路径数。

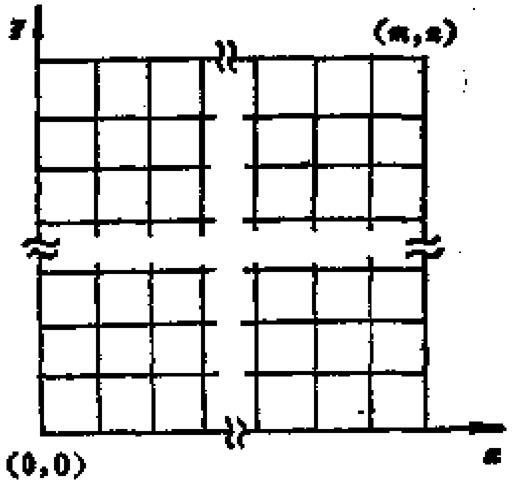


图 1-3-1

这里所谓"路径"指的是不允许向后退，即不允许逆着 x, y 的正向走。

设从 (0,0) 点开始向水平方向前进一步为 x，垂直方向上升一步为 y。于是从 (0, 0) 到 (m, n)点，水平方向要走 m 步，垂直方向要走 n 步，总和为 $m+n$ 步。一条到达 (m, n)点的路径对应一由 m 个 x, n 个 y 组成的一个排列：

$$\underbrace{xxy\cdots xy}_{m\text{个}x, n\text{个}y}.$$

反过来 m 个 x, n 个 y 的任一排列对应一条从(0,0)到 (m, n) 的路径。所以从(0,0)点到 (m, n) 点的路径和 m 个 x, n 个 y 的排列一一对应，故所求的路径数为

$$N = C(m+n, m).$$

例 2. C_nH_{2n+2} 是碳氢化合物，随着 n 的不同有下列不同的枝链：

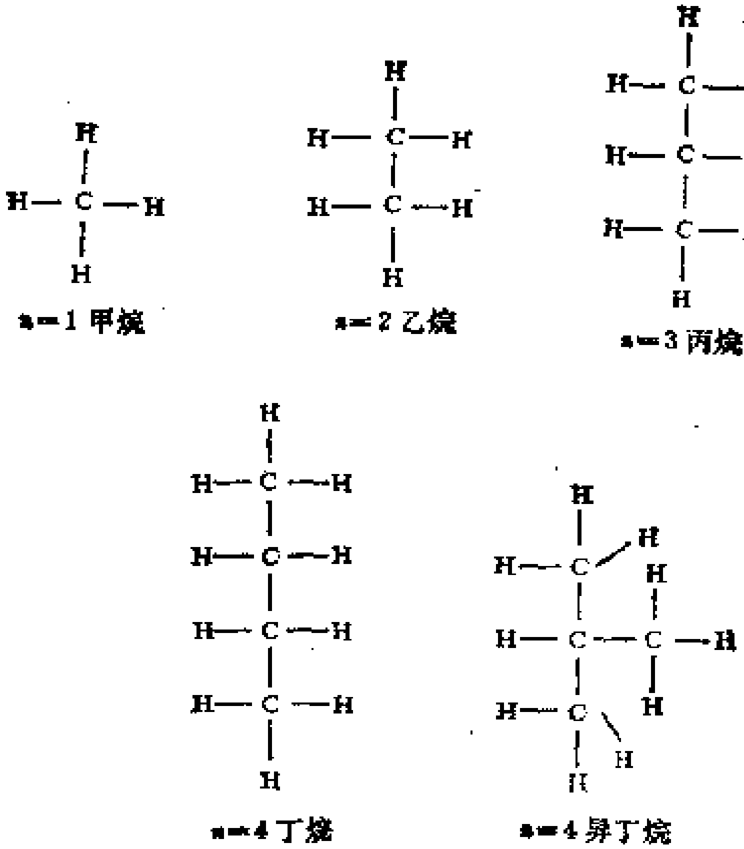


图 1-3-2

这说明对应于 C_nH_{2n+2} 的枝链是有 $3n+2$ 个顶点的一棵树，其中 n 个顶点与之关联的边数为 4；其它 $2n+2$ 个顶点是叶子. 对于这样结构的每一棵树，就对应有一种特定的化合物. 从而可以通过研究具有上述性质的树找到不同的碳氢化合物 C_nH_{2n+2}.

例 3. 在 100 名选手之间进行淘汰赛(即一场的比赛结果，失败者退出比赛)，最后产生一名冠军，问要举行几场比赛?

解: 第 1 轮要进行 50 场比赛，留下 50 名选手；

第 2 轮要进行 25 场比赛，留下 25 名选手；

第 3 轮要进行 12 场比赛，1名选手轮空，留下 13 名选手；

第 4 轮要进行 6 场比赛，1 名选手轮空，留下 7 名选手；

第 5 轮要进行 3 场比赛，1 名选手轮空，留下 4 位选手；

第 6 轮要进行 2 场比赛，留下 2 名选手：

最后一场决赛，产生一名冠军。

共举行的比赛场数 $=50+25+12+6+3+2+1=99$ 场。其实由 100 名选手最后产生一名冠军，要淘汰掉 99 人，一场比赛淘汰一名选手，两者一一对应，故立即可得比赛场数应为 99 场。

下面介绍一个图论中有名的问题，即计算 n 个有标号的顶点的树的数目。即对 n 个顶点 $v_1,v_2,\cdots,v_n$ 用 $n-1$ 条边把它们连接起来，问有多少种方案？

定理 (Cayley)：n 个有标号的顶点的树的数目等于 n^{n-2}。

证明：定理的证明就是采用了一一对应的方法。

假设这 n 个顶点的标号为 $1,2,\cdots,n$，T 是其中一棵树。T 的树叶中标号最小的设为 a_1，其相邻点为 b_1，移去 a_1 点和边 (a_1,b_1)；在剩下的 $n-1$ 个顶点的树中再寻找标号最小的树叶，设为 a_2，其相邻的顶点设为 b_2，移去顶点 a_2 及边 (a_2,b_2)；$\cdots$。继续以上的步骤直到剩下一条边为止。由于树枝边数为 $n-1$，故共进行了 $n-2$ 次，得序列

$$b_1b_2\cdots b_{n-2}.$$

通过上述的规则，树 T 对应了一 $n-2$ 个数的序列：$b_1b_2\cdots b_{n-2}$。这样所得序列不都是由不同的 $n-2$ 个数组成。

反之，给了一 $n-2$ 个数的序列

$$b_1b_2\cdots b_{n-2}, \tag{1}$$

可以找到一棵树 T 与之对应，办法如下：从序列

$$1,2,3,\cdots,n \tag{2}$$

中找出第 1 个不在序列(1)中出现的数，显然这个数就是 a_1，建立边 (a_1,b_1)。从序列(1)中消去 b_1，从序列(2)中消去 a_1，在余下的序列(1)和(2)中继续以上的过程，直到序列(1)空了为止。这时序列(2)留下两个数设为 a_i，b_i，连接顶点 a_i，b_i 便得一棵树。

这样，n 个标号顶点的树 T 和 $n-2$ 个数 $b_1,b_2,\cdots,b_{n-2}$ 组

成的序列(1)建立了一一对应关系。根据乘法法则，序列(1)的数目为n^{n-2}。 ∎

现在举例说明以加深理解。

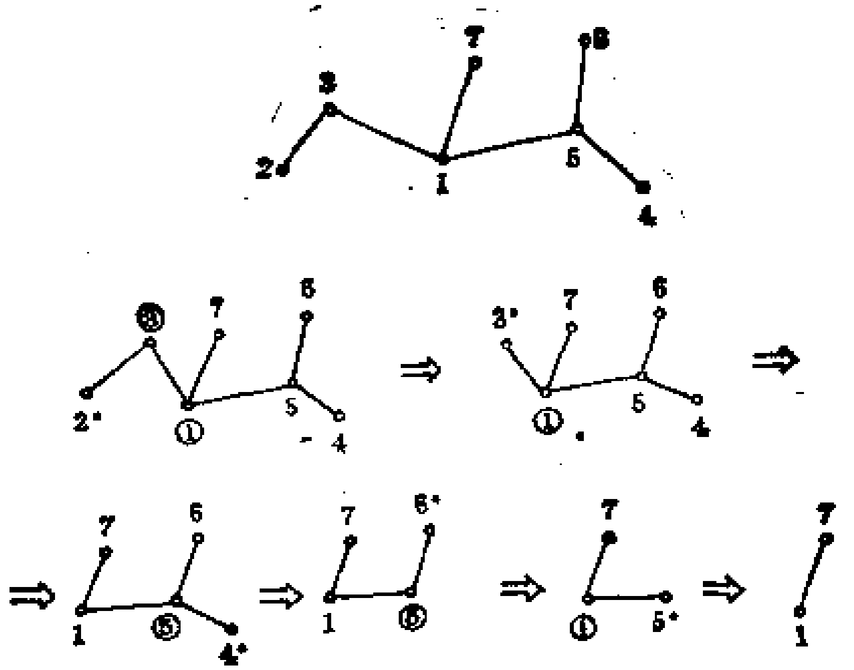


图 1-3-3

图 1-3-3 中有*点的顶点为标号最小的叶子。○里的数为对应的邻点。于是得序列

$$3, 1, 5, 5, 1.$$

从序列 3, 1, 5, 5, 1 不难看出叶子的标号为

$$2, 4, 6, 7$$

而且从 3 出现一次，1 和 5 均出现两次及其出现先后次序可以看出树的结构。反过来可从序列 3,1,5,5,1 找出树来：

$$\begin{pmatrix}1,2^*,3,4,5,6,7\\3^*,1,5,5,1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1,3^*,4,5,6,7\\1^*,5,5,1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1,4^*,5,6,7\\5^*,5,1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}1,5,6^*,7\\5^*,1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1,5^*,7\\1^*\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1,7\\\phi\end{pmatrix}.$$

上式中每组有上、下两个序列。上面一个对应于序列(2)，下

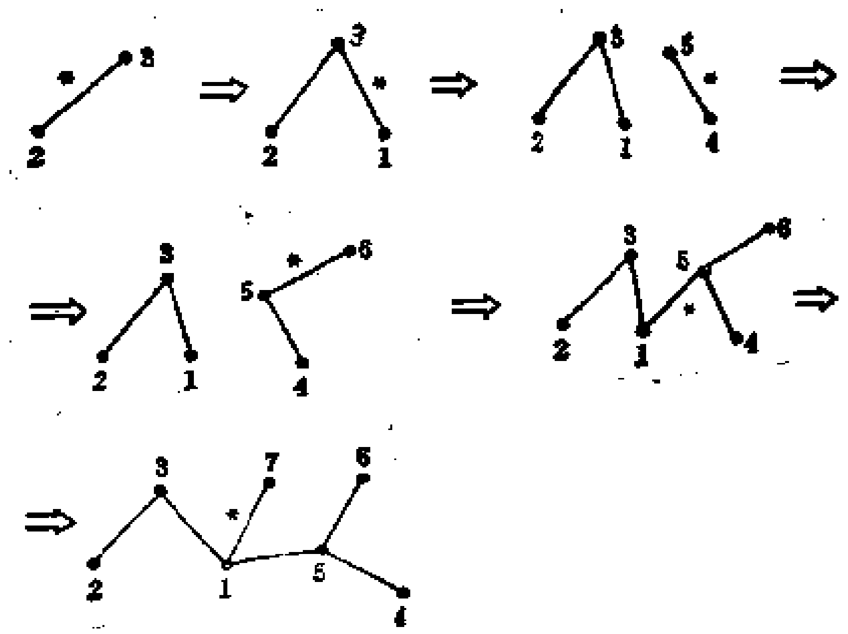


图 1-3-4

面一个对应于序列(1)．在序列(2)中＊符号指的是第一个不在序列(1)中出现的数以及(1)中指明与之相应的邻点．相应的逆过程表示于图 1-3-4．图中打＊的边为新增加的边．

§4 排列的生成算法之一

1. 序数法：

自然数的十进制表示法是最常用的，比如小于 10^l 的正整数 n，可用下列形式表示

$$n=\sum_{k=0}^{l-1} a_k 10^k,\quad 0\leqslant a_k\leqslant 9$$

这种表示法还可以推广到 p 进制数，即

$$n=\sum_{k=0}^{m} a_k p^k,\quad 0\leqslant a_k< p$$

比如 $p=2$ 便是二进制数，计算机用的就是二进制数．

下面介绍又一种整数表示法，它的依据是

$$(n)! = (\overline{n-1}+1)(n-1)! = (n-1)(n-1)! + (n-1)!.$$

同理 $\quad (n-1)! = (n-2)(n-2)! + (n-2)!.$

$$\therefore \quad n! = (n-1)(n-1)! + (n-2)(n-2)! + (n-3)(n-3)! + \cdots + 2\cdot 2! + 2!$$

又 $\quad 2! = 1+1,$

$$\therefore \qquad n! = \sum_{k=1}^{n-1} k\cdot k! + 1.$$

$$1!+1=2!\quad 2\cdot 2!+1!+1!=3!\quad 3\cdot 3!+2\cdot 2! + 1!+1=4!,\cdots$$

即 $n!-1=(n-1)(n-1)!+(n-2)(n-2)!+\cdots+2\cdot 2! + 1\cdot 1!$. 上式和 $10^n-1=9\cdot 10^{n-1}+9\cdot 10^{n-2}+\cdots+9$ 类似。不难证明从 0 到 $n!-1$ 的任何整数 m 可唯一地表为

$$m = a_{n-1}(n-1)! + a_{n-2}(n-2)! + \cdots + a_1, \tag{1-4-1}$$

其中 $$0 \leqslant a_i \leqslant i,\ i=1,2,\cdots,n-1. \tag{1-4-2}$$

所以从 0 到 $n!-1$ 的 $n!$ 个整数和满足(1-4-1)的序列

$$(a_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-3}, \cdots, a_2, a_1) \tag{1-4-3}$$

一一对应。另一方面不难从 m 算出 $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$. 从 (1-4-1) 可见，数 m 除以 2 的整数部分为

$$a_{n-1}\frac{(n-1)!}{2} + a_{n-2}\frac{(n-2)!}{2} + \cdots + a_3\frac{3!}{2} + a_2. \tag{1-4-4}$$

m 整除以 2 的余数即为 a_1.

类似的理由(1-4-4)用 3 除，余数即为 a_2. 余此类推。

$$n_1 = m,$$

$$n_{i+1} = \left\lfloor \frac{n_i}{i+1} \right\rfloor,\ r_i = n_i - (i+1)n_{i+1}$$

即 n_{i+1} 为 n_i 对 $i+1$ 作整数除法得的商，而 r_i 为相应的余数。显然有

$$a_1=r_1,\quad a_2=r_2,\quad \cdots.$$

即 $a_i=r_i,\ i=1,2,\cdots,n-1$。

例. $m=4000$，即 $n_1=4000$

$$n_2=\left[\frac{n_1}{2}\right]=2000,\quad r_1=0,$$

$$n_3=\left[\frac{n_2}{3}\right]=666,\quad r_2=2,$$

$$n_4=\left[\frac{n_3}{4}\right]=166,\quad r_3=2,$$

$$n_5=\left[\frac{n_4}{5}\right]=33,\quad r_4=1,$$

$$n_6=\left[\frac{n_5}{6}\right]=5,\quad r_5=3,$$

$$n_7=\left[\frac{n_6}{7}\right]=0,\quad r_6=5.$$

即 $4000=5\cdot 6!+3\cdot 5!+4!+2\cdot 3!+2\cdot 2!$。

综合上面的讨论可见，满足条件 $0\leqslant a_i\leqslant i,\ 1\leqslant i\leqslant n-1$ 的序列

$$(a_{n-1},\ a_{n-2},\ \cdots,\ a_1)$$

共有 $n!$ 个，正好和从 0 到 $n!-1$ 的 $n!$ 个整数一一对应。下面试图使满足条件(1-4-2)的 $n!$ 个序列$(a_{n-1},a_{n-2},\cdots,a_1)$和某一组 n 个元素的排列建立起一一对应关系，从而从序列 $(a_{n-1},a_{n-2},\cdots,a_1)$ 得到一种生成排列的办法。为了方便起见，不妨令 n 个对象分别是 $1,2,\cdots,n$。对应的规则如下：设序列 $(a_{n-1},a_{n-2},\cdots,a_1)$对应某个排列 $(p)=p_1p_2\cdots p_n$，其中 a_i 可以看作是排列 (p) 中数 $i+1$ 所在位置后面比 $i+1$ 小的数的个数，也就是排列(p)中从

数 $i+1$ 开始向右统计小于或等于 i 的数的个数。以排列 4213 为例，4 后面比它小的数的个数(即 a_3) 为 3；3 后面比它小的数的个数(即 a_2) 等于 0；2 后面比它小的数的个数(即 a_1)为 1；排列中比 1 小的数是没有的。故得

$$(p)=(4213)\Longleftrightarrow(a_3a_2a_1)=(301).$$

反过来可以从(301)获得一排列(4213)。各个序列的对应排列如表 1-4-1。

表 1-4-1

N	$a_3\ a_2\ a_1$	$p_1\ p_2\ p_3\ p_4$	N	$a_3\ a_2\ a_1$	$p_1\ p_2\ p_3\ p_4$
0	0 0 0	1 2 3 4	12	2 0 0	1 4 2 3
1	0 0 1	2 1 3 4	13	2 0 1	2 4 1 3
2	0 1 0	1 3 2 4	14	2 1 0	1 4 3 2
3	0 1 1	2 3 1 4	15	2 1 1	2 4 3 1
4	0 2 0	3 1 2 4	16	2 2 0	3 4 1 2
5	0 2 1	3 2 1 4	17	2 2 1	3 4 2 1
6	1 0 0	1 2 4 3	18	3 0 0	4 1 2 3
7	1 0 1	2 1 4 3	19	3 0 1	4 2 1 3
8	1 1 0	1 3 4 2	20	3 1 0	4 1 3 2
9	1 1 1	2 3 4 1	21	3 1 1	4 2 3 1
10	1 2 0	3 1 4 2	22	3 2 0	4 3 1 2
11	1 2 1	3 2 4 1	23	3 2 1	4 3 2 1

以 $a_3a_2a_1=021$ 为例，由于 $a_1=1$，故 1 只能在 2 右方。又 $a_2=2$，故 2 和 1 位于 3 的右方。但 $a_3=0$，故 321 位于 4 的左方。因此 $a_3a_2a_1=021$ 对应于排列 3214。

2. 字典序法：

图 1-4-1 是高度为 4 的树，按从根到树叶读各边的标号的顺序，给出一个排列。从左至右依次为：

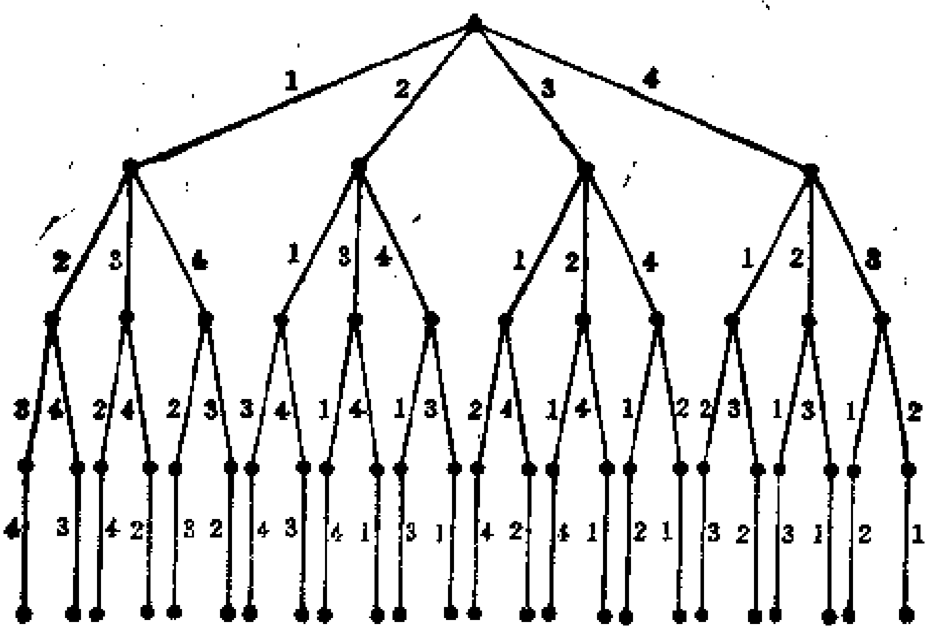


图 1-4-1

1234， 1243， 1324， 1342， 1423， 1432，
2134， 2143， 2314， 2341， 2413， 2431，
3124， 3142， 3214， 3241， 3412， 3421，
4123， 4132， 4213， 4231， 4312， 4321，

它是按"字典"的顺序排列的，由一个排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 生成下一个排列的算法可归结如下：

(a) 求满足关系式 $p_{j-1}<p_j$ 的 j 的最大值，设为 i，即

$$i=\max\{j\mid p_{j-1}<p_j\}.$$

(b) 求满足关系式 $p_{i-1}<p_k$ 的 k 的最大者，设为 j，即

$$j=\max\{k\mid p_{i-1}<p_k\}.$$

(c) p_{i-1} 与 p_j 互换得 $(\bar{p})=\bar{p}_1\bar{p}_2\cdots\bar{p}_n$。

(d) $(\bar{p})=\bar{p}_1\bar{p}_2\cdots\bar{p}_{i-1}\bar{p}_i\bar{p}_{i+1}\cdots\bar{p}_n$ 中 $\bar{p}_i\bar{p}_{i+1}\cdots\bar{p}_n$ 部分的顺序逆转，得 $\bar{p}_1\bar{p}_2\cdots\bar{p}_{i-1}\bar{p}_n\cdots\bar{p}_{i+1}\bar{p}_i$ 便是所求的下一个排列。

例. 设 $p_1p_2p_3p_4=3421$。

(a) $i=\max\{j\mid p_{j-1}<p_j\}=2$；

(b) $j=\max\{k\mid p_1<p_k\}=2$；

(c) p_1与p_2交换得4321;

(d) 4321中的321顺序逆转得下个排列4123。

§5 排列的邻位互换生成算法

最直观的排列生成可以递归地进行如下。例如$n=2$时的排列为12,21，$n=3$时的排列为3分别插入到12和21的前面、中间、后面可得

312	132	123
321	231	213

类似$n=4$时有排列:

4312	3412	3142	3124
4132	1432	1342	1324
4123	1423	1243	1234
4321	3421	3241	3214
4231	2431	2341	2314
4213	2413	2143	2134

上述的由$n-1$个文字的全排列产生n个文字的全排列的最大缺点是必须全部保留$n-1$个文字的全排列。因此存储单元需求量大。若能从开始的$1\ 2\cdots n-1\ n$依次产生下一个排列，直至全部结束，则可以避免上述的缺点。

1. 算法

下面介绍一种较为方便的算法。以1234的排列为例，开始在排列1234的各数上方加一个箭头"←"如$\overleftarrow{1}\,\overleftarrow{2}\,\overleftarrow{3}\,\overleftarrow{4}$。当一个数上方箭头所指的一侧，相邻的数比该数小时，便称该数处于活动状态。例如$\overleftarrow{1}\,\overleftarrow{2}\,\overleftarrow{3}\,\overleftarrow{4}$中$\overleftarrow{2},\overleftarrow{3},\overleftarrow{4}$都处于活动状态。

下面叙述从一个排列$(p)=p_1p_2\cdots p_n$生成下一个排列的办法如下:

(S1) 若排列 $(p)=p_1p_2\cdots p_n$ 中无一处于活动状态,则停止;否则转 (S2)。

(S2)求所有处于活动状态的数中的最大者,设为 m。m 和它的箭头所指的一侧的相邻数互换位置,转 (S3)。

(S3)令比 m 大的所有数的箭头改变方向,转(S1)。

举例见图 1-5-1。

请读者注意各数的活动规律,以 1234 中的 4 为例,从一端移到另一端,共进行了 3 次换位. 然后暂停一次,这时 3 开始活动. 这是 4 活动的一个过程。

3 在 123 中的活动规律也很相似,可以推广到 n 个数的排列。

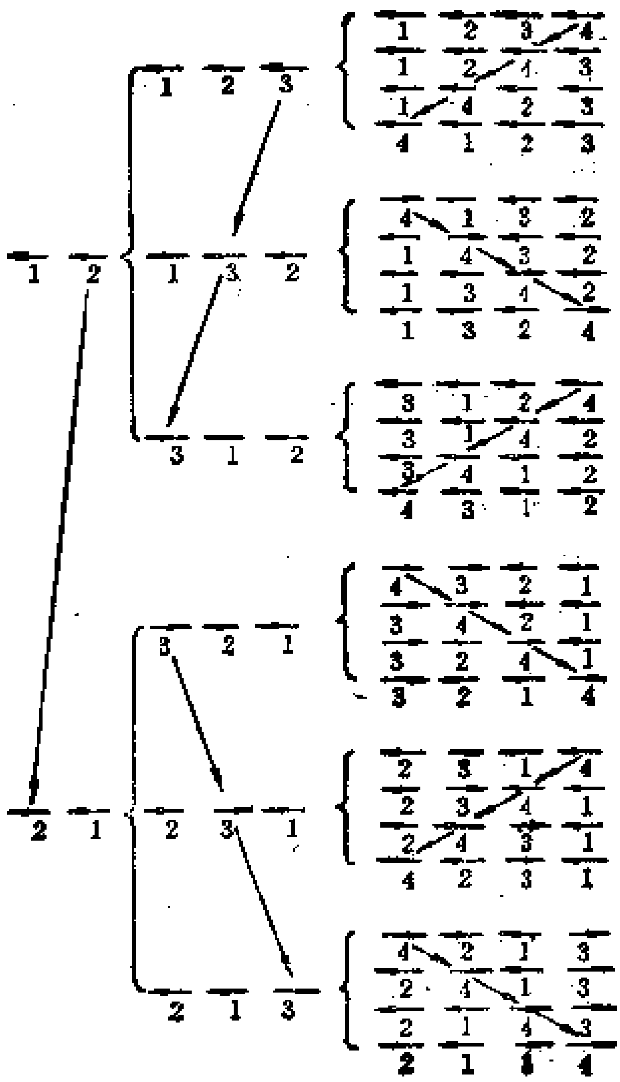


图 1-5-1

2. 算法的实现

稍加注意不难发现算法存在改善的很大的可能性. 比如数 n 从一端到另一端的活动是有规律的,无须每一次都要找哪些数是处于活动状态,从而再找其中的最大数,这个工作量是巨大而无必要. 下面用 PASCAL 语言写出改善了的算法,其中矩阵 d 是用以记录对应的数的"行踪",比如 $d[k]$ 拟记录数 k 在 $1,2,\cdots,k$ 这 k 个数的排列中的位置. 矩阵

e 记录了对应数的箭头方向。数 k 只有走到 k 个数 1,2,…,k 的排列的两头时才改变方向。这些道理从图 1-5-1 中可以看得很清楚。其中 k 可以是 2 到 n 的任意整数，而且规定数 k 的箭头方向指向左方时 $e[k]=-1$，反之 $e[k]=1$。$p=0$ 是 k 走到 1，2…，k 的排列的最左端的标志，$p=k$ 是 k 走到最右端的标志。

```
    procedure pergen(n:integer);
    label 1;
    var p,a,r,i,k :integer;
         a :array[1..n] of integer;
        e,d:array[2..n] of integer;
    begin
      a[1] := 1;
      for i:= 2 to n do
      begin
        a[i]:= i;
        d[i]:= i;
        e[i]:= -1
      end;
1:  q:= 0;
    for i:= 1 to n do write(a[i]);
    write('     ');
    for k:= n downto 2 do
    begin
      d[k]:= d[k] + e[k];
      p:= d[k];
      if p = k then e[k]:= -1
              else if p = 0 then begin
                                   e[k]:= 1; q:= q + 1
                                 end
                           else begin
```

```
                                p: = p + q; r: = a[p]; a[p]: =
                                                  a[p + 1];
                                a[p + 1]: = r; goto 1
        end                  end
     end;
```

§6 组合的生成

今以从 1,2,3,4,5,6 中取 3 个组合为例，从中找出规律性来，算法便自然形成了。

(1) 123　(2) 124　(3) 125　(4) 126　(5) 134

(6) 135　(7) 136　(8) 145　(9) 146　(10) 156

(11) 234　(12) 235　(13) 236　(14) 245　(15) 246

(16) 256　(17) 345　(18) 346　(19) 356　(20) 456

读者从上面的生成过程中可注意到有如下规律：

(1) 最后一位数最大可达 n，本例 $n=6$；倒数第 2 位最大可达 $n-1,\cdots$，依此类推倒数第 k 位 $(k\leqslant r)$ 不得超过 $n-k+1$。若 r 个元素组合用 $c_1c_2\cdots c_r$ 表示，并不妨假定

$$c_1<c_2<\cdots<c_r,$$

即 $c_r\leqslant n,\ c_{r-1}\leqslant n-1,\ \cdots,\ c_1\leqslant n-r+1$。

或表以 $c_i\leqslant n-r+i,\ i=1,2,\cdots,r$。

(2) 当存在 $c_j<n-r+j$ 时，其中下标的最大者设为 i，即 $i=\max\{j\,|\,c_j<n-r+j\}$，则作 $c_i\leftarrow c_i+1$。与之相应地作

$$c_{i+1}\leftarrow c_i+1,\ c_{i+2}\leftarrow c_{i+1}+1,\ \cdots,\ c_r\leftarrow c_{r-1}+1.$$

例如上例中的组合 256，显然 c_2,c_3 已分别达到 5, 6, 故 c_1 从 2 修改为 3。c_2, c_3 作相应的修改，分别改为 4, 5 得 345。即 256 的下一个组合应为 345。

明白了以上的道理，归纳从一个组合 $c_1c_2\cdots c_r$ 得到下一个组

合的步骤如下：

① 求满足不等式 $c_i < n - r + i$ 的最大的下标 i，即

$$i = \max\{j \mid c_j < n - r + j\};$$

② $c_i \leftarrow c_i + 1$；

③ 从 $i+1$ 位开始作修改：$c_j \leftarrow c_{j-1} + 1$；$j = i+1, i+2, \cdots, r$。

§7 允许重复的组合

定理： 在 n 个不同的元素中取 r 个进行组合，若允许重复，则组合数为 $C(n+r-1, r)$。

证明： 只要证明允许重复的组合与从 $n+r-1$ 个不同的元素中取 r 个作不重复的组合一一对应，定理就获得了证明。

先证明 n 取 r 可重复组合，和从 $n+r-1$ 个中取 r 个的不允许重复的组合一一对应。

不失一般性，假定 n 个不同元素分别为 $1, 2, \cdots, n$. 从中取 r 个作允许重复的组合 $a_1, a_2, \cdots, a_r$。由于存在重复，故

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_r.$$

从 $(a_1, a_2, \cdots, a_r)$ 引出 $(a_1, a_2+1, \cdots, a_k+k-1, \cdots, a_r+r-1)$. 使每一允许重复的组合 $(a_1, a_2, \cdots, a_r)$ 对应一不允许重复的组合 $(a_1, a_2+1, \cdots, a_k+k-1, \cdots, a_r+r-1)$，令后者为 $(b_1, b_2, \cdots, b_r)$；即 $b_k = a_k + (k-1), k = 1, 2, \cdots, r$；其中 $b_1 < b_2 < \cdots < b_r \leqslant n+r-1$. 故从 1 到 n 中取 r 个的允许重复组合，对应一个从 1 到 $n+r-1$ 中取 r 的不允许重复的组合。

反之，从 $(1, 2, \cdots, n+r-1)$ 中取 r 个作不重复组合 $(b_1, b_2, \cdots, b_r)$，不妨设 $b_1 < b_2 < \cdots < b_r \leqslant n+r-1$。构造序列 $b_1, b_2-1, b_3-2, \cdots, b_r-r+1$，显然有

$$b_1 \leqslant b_2 - 1 \leqslant b_3 - 2 \leqslant \cdots \leqslant b_r - r + 1.$$

令：$$a_k = b_k - k + 1,\ k = 1,2,\cdots,r.$$

$$\therefore\quad a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_r \leqslant n.$$

即从 1 到 $n+r-1$ 取 r 的不允许重复的组合，对应于一从 1 到 n 取 r 个的允许重复的组合。 ■

允许重复的组合的典型问题是取 r 个无区别的球放进 n 个有标志的合子，而每合的球数不加限制的方案数。故得

定理： r 个无区别的球放进 n 个有标志的合子里，每盒放的球可多于一个，则共有 $C(n+r-1,r)$ 种方案。

例． 试问 $(x+y+z)^4$ 有多少项？

$(x+y+z)^4$ 的展开式每一项都是 4 次方的，相当于 4 个无区别的球，放进 x,y,z 三个有标志的合子，每盒放进的球数不加限制。例如：

x^4 相当于 4 个球都放到 x 合子里，y，z 空合。

x^2yz 相当于 2 个球放进 x 合子，y,z 合子各一球。

所以 $r=4$，$n=3$。

$$N = C(4+3-1,4) = C(6,4) = \frac{6\times 5}{2!} = 15.$$

这 15 项是 x^4，x^3y，x^3z，x^2yz，x^2y^2，x^2z^2，xy^3，xz^3，xyz^2，xy^2z，y^2z^2，y^3z，z^3y，z^4，y^4。

§8 若干等式和其组合意义

若干排列组合的等式有着深刻的实际意义，这一节里要透过形式推理去了解其含义，这不仅可以起到加深理解的作用，而且十分有意义。在以后的讨论中如不特别说明，则从 n 中取 r 个组合都是指不允许重复的组合。

等式 1：$$C(n,r) = C(n,n-r). \tag{1-8-1}$$

从 n 个元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中取走 r 个，余下的元素个数为

$n-r$，故可得从 n 取 r 组合和从 n 取 $n-r$ 组合一一对应。

等式 2：$C(n,r)=C(n-1,r)+C(n-1,r-1)$。 (1-8-2)

从 n 个元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中取 r 个组合的全体，就其中元素 a_1 来看，可分两类，即所求的组合由这两部分构成：

(1)组合中含有元素 a_1。这一类组合可看作是除去 a_1，从剩下的 $n-1$ 元素中取 $r-1$ 的组合，即由从 $n-1$ 个元素 $a_2,a_3,\cdots,a_n$ 中取 $r-1$ 个组合，再加上 a_1 而形成。其数目为 $C(n-1,r-1)$。

(2)不含有元素 a_1 的组合。这一类组合可看作是从 $a_2,a_3,\cdots,a_n$ 中取 r 个组合。其数目为 $C(n-1,r)$。

例如 1,2,3,4,5 取 3 个组合得：

123,124,125,134,135,145,234,235,245,345。其中 123,124,125,134,135,145 可以看作是由 2,3,4,5 取 2 个组合得 23,24,25,34,35,45，再分别加上 1 而成。其中234,235,245,345 是由 2,3,4,5 取 3 个组合而成的。

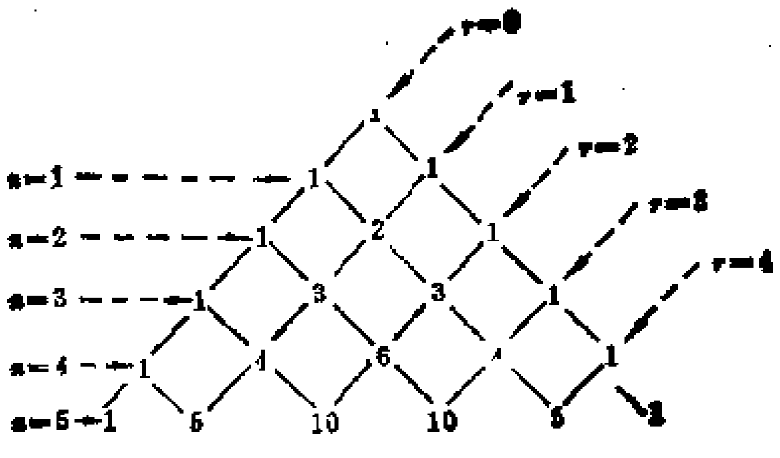


图 1-8-1

等式 2 的又一个结果是著名 Pascal 三角，也就是我国的杨辉三角。

例如 $n=5$ 行的序列 1,5,10,10,5,1，恰好依次是

$$(x+y)^5=x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5$$
的系数。

等式 2 的另一种形式为

$$C(m+n,m)=C(m+n-1,m)+C(m+n-1,m-1).$$

等式左端的组合意义是从(0,0)到(m,n)点路径数，见§3 例 1. 等号右端第 1 项表从(0,0)到$(m,n-1)$点的路径数；第 2 项为从(0,0)点到$(m-1,n)$点的路径数。因$(m,n-1)$、$(m-1,n)$点是(0,0)点到(m,n)点必经的点，故从(0,0)点到(m,n)点的路径数等于分别到$(m-1,n)$和$(m,n-1)$点的路径数之和(见图 1-8-2)。

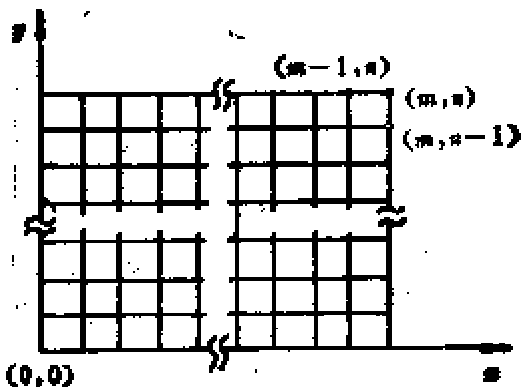


图 1-8-2

等式 3：$C(n+r+1,r)=C(n+r,r)+C(n+r-1,r-1)+C(n+r-2,r-2)+\cdots+C(n+1,1)+C(n,0).$ (1-8-3)

这个等式十分重要，它可以从等式 2 而获得证明。

组合意义 1：等式左端是从 $n+r+1$ 个元素 $a_1,a_2,\cdots,a_{n+r+1}$ 中取出 r 个作不允许重复的组合，结果不外有以下几种情形：

(1) r 个组合元素中不含有元素 a_1 的，相当于从 $n+r$ 个元素 $a_2,a_3,\cdots,a_{n+r+1}$ 中取 r 个组合，其组合数为 $C(n+r,r)$。

(2) r 个组合元素中含有 a_1，但不含有元素 a_2 的。即对含有元素 a_1 的组合中依 a_2 元素重新分类，含 a_1 而不含 a_2 的组合，相当

于从除去元素 a_1、a_2 后的 $n+r-1$ 个元素 $a_3, a_4, \cdots, a_{n+r+1}$ 中取 $r-1$ 个组合，然后加上元素 a_1 而成；其组合数为

$$C(n+r-1,\ r-1).$$

(3) r 个组合元素中含元素 a_1, a_2，但不含元素 a_3 者，相当于从除去 a_1, a_2, a_3 三元素后的 $n+r-2$ 个元素中，取 $r-2$ 个元素组合，然后加上 a_1, a_2 而成；其组合数为 $C(n+r-2, r-2)$. 其它依此类推。

取出的 r 个组合元素中含有 $a_1, a_2, \cdots, a_{r-1}$，但不含有元素 a_r 的，相当于从 $a_{r+1}, \cdots, a_{n+r+1}$ 中取 1 个元素与 $a_1, a_2, \cdots, a_{r-1}$ 组合，其组合数显然为 $C(n+1, 1)$.

(4) 由 $a_1a_2\cdots a_r$ 组成的组合 $C(n, 0)=1$.

组合意义 2：见图 1-8-3. 公式左端相当于从 (0, 0) 点到 $(n+1, r)$ 点的路径数目. 公式右端第 1 项 $C(n+r, r)$ 为从(0, 0)点到(n, r)点的路径数；第 2 项 $C(n+r-1, r-1)$ 为从(0,0)点到$(n, r-1)$点的路径数；依此类推. $C(n+1, 1)$项为从(0,0)点到$(n, 1)$点的路径数；最后一项 $C(n, 0)$ 为从(0, 0)点到$(n, 0)$点的路径数.

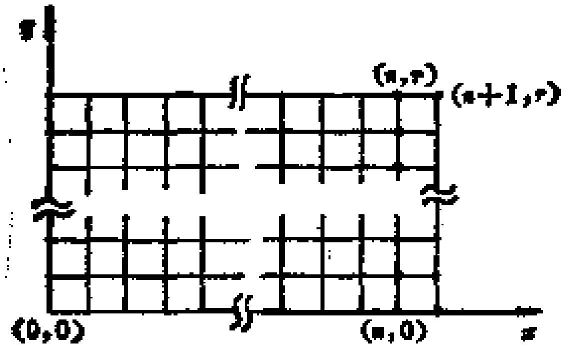


图 1-8-3

所以，等式 3 的组合意义为从(0, 0)点到 $(n+1, r)$点的路径，就其是否经过从 (n, i) 点到 $(n+1, i)$ 点的边，分解成不同的 $r+1$ 类，其中 $i=0, 1, \cdots, r$. 从(0,0)点出发，途经从 (n, i) 点到$(n+1, i)$ 点的边到达$(n+1, r)$的路径数等于从(0,0)点到达(n, i)点的路径数. 根据加法法则等式 3 成立.

组合意义 3：公式的左端可以看成是由 $n+2$ 个元素 $a_1, a_2, \cdots, a_{n+2}$ 中取 r 个作允许重复的组合. 可以有如下几种可

能：

(1) 不含有元素 a_1. 由剩下的 $n+1$ 个元素 $a_2, a_3, \cdots, a_{n+2}$ 取 r 个进行允许重复的组合，其组合数为 $C(n+r,r)$.

(2) 仅含一个元素 a_1. 相当于排除元素 a_1, 在余下的 $n+1$ 个元素 $a_2, a_3, \cdots, a_{n+2}$ 中取 $r-1$ 个元素进行允许重复的组合，然后加上一个 a_1 而形成的，其组合数为 $C(n+r-1, r-1)$.

(3) 含有两个元素 a_1. 相当于从 $a_2, a_3, \cdots, a_{n+2}$ 中取 $r-2$ 个元素作允许重复的组合，然后加上两个 a_1 而成的；其组合数为 $C(n+r-2, r-2)$. 余此类推.

含有 $r-1$ 个元素 a_1, 另一个元素为剩下的 $n+1$ 个元素中的一个，其组合数为 $C(n+1,1)$.

r 个元素都是 a_1, 其数目为 1.

由加法法则便得等式 3.

例如从 1、2、3 中取 4 个作允许重复组合. 令 $a_1=1$, 则有

不出现 1 的有：2222, 2223, 2233, 2333, 3333;

出现 1 个 1 的有：1222, 1223, 1233, 1333;

出现 2 个 1 的有：1122, 1123, 1133;

出现 3 个 1 的有：1112, 1113;

出现 4 个 1 的有：1111.

从等式 3 可得下列级数的和.

(1) $S_1 = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = C(1,1) + C(2,1) + \cdots + C(n,1)$,

$\because \quad C(n,1) = C(n, n-1)$,

$S_1 = C(1,0) + C(2,1) + C(3,2) + \cdots + C(n, n-1)$,

相当于等式 3 中 $n=1$, $r=n-1$.

$\therefore \quad S_1 = C(n+1, n-1) = \frac{1}{2}n(n+1)$.

(2) $S_2 = 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \cdots + n(n+1)$

$$= 2 + 2C(3,2) + 2C(4,2) + \cdots + 2C(n+1,2)$$
$$= 2[C(2,0) + C(3,1) + C(4,2) + \cdots + C(n+1,n-1)]$$

相当于等式 3 中 $n=2$, $r=n-1$.

$$\therefore \quad S_2 = 2C(n+2,n-1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2).$$

(3) $S_3 = 1\cdot2\cdot3 + 2\cdot3\cdot4 + \cdots + n(n+1)(n+2)$

$$= 3![C(3,3) + C(4,3) + \cdots + C(n+2,3)]$$
$$= 3![C(3,0) + C(4,1) + C(5,2) + \cdots + C(n+2,n-1)]$$
$$= 3!C(n+3,n-1) = 3!C(n+3,4)$$
$$= \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3).$$

等式 4:

$$\binom{n}{l}\binom{l}{r} = \binom{n}{r}\binom{n-r}{l-r}, \ (l \geqslant r). \qquad (1\text{-}8\text{-}4)$$

组合意义: 等式左端可以看作是先从 n 个元素中取 l 个组合，从所得的每个组合的 l 个元素中取 r 个组合. 由此所得的全部结果相当于从 n 个元素中直接取 r 个组合，但是有重复. 从等式右端可知，其重复度为 $\binom{n-r}{l-r}$，即其重复数等于剩下的 $n-r$ 元素中取 $l-r$ 个组合的组合数.

例如从 1,2,3,4,5 中取 4 个组合得

1234, 1235, 1245, 1345, 2345,

再从每个组合中取 2 个组合得表 1-8-1.

从表 1-8-1 可见相当于从 1,2,3,4,5 中取 2 个组合，所得的 12,13,14,15,23,24,25,34,35,45 各重复 3 次. 以 12 为例，除去 12 剩下的 3, 4, 5 中取 2 个组合得 34, 35, 45, 与 12 组成 1234,

表 1-8-1

取2组合 / 取4组合	12	13	14	15	23	24	25	34	35	45
1234	12	13	14		23	24		34		
1235	12	13		15	23		25		35	
1245	12		14	15		24	25			45
1345		13	14	15				34	35	45
2345					23	24	25	34	35	45

1235，1245。这些都有构成 12 的可能，12 的重复是由此产生的。

等式 5：$C(m,0)+C(m,1)+C(m,2)+\cdots+C(m,m)=2^m$.

(1-8-5)

证明：根据二项式定理

$$(x+y)^m=x^m+C(m,1)x^{m-1}y+C(m,2)x^{m-2}y^2+\cdots+y^m,$$

令 $x=y=1$ 等式 5 便得了证明。

组合意义 1：由 m 个元素中的每一个元素"取"与"不取"构成所有状态，由乘法法则可知其总数为 2^m。等式的左端说明这所有的状态可分解为从 m 个元素中分别取 0 个、1 个、2 个、…、m 个组合的总和。

等式 5 的组合意义 2：等式左端的第 1 项为从(0,0)点到(0,m)点的路径数；第 2 项为从(0,0)点到(1,$m-1$)点的路径数，第 3 项为从(0,0)点到(2,$m-2$)点的路径数。其余依此类推，见图 1-8-4。等式 5 的组合意义是从(0,0)到直线 PQ 上的格子点的路径总和为 2^m。或 2^m 个人从(0，0)点出发每到十字路口处便

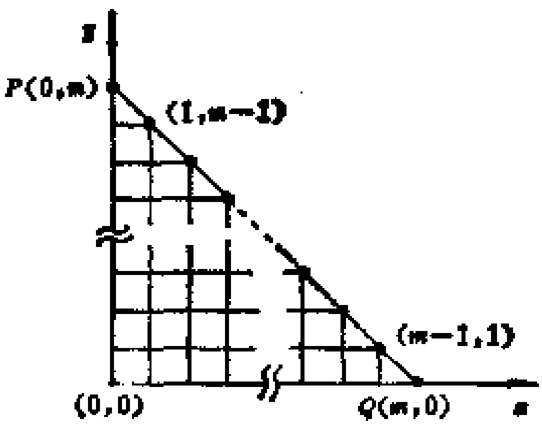


图 1-8-4

一分为 2，直到到达 PQ 线上为止。这样每人所走的路径各不相同，到达终点的人数即为从(0,0)点到该点的路径数。

等式 6：$C(n,0)-C(n,1)+C(n,2)-\cdots\pm C(n,n)=0$,

(1-8-6)

在 $(x+y)^n=x^n+C(n,1)x^{n-1}y+C(n,2)x^{n-2}y^2+\cdots+C(n,n)y^n$ 等式中令 $x=1$, $y=-1$ 等式 6 便得证明.

组合意义： n 个元素中取 r 个组合。r 为奇数的组合数目等于 r 为偶数的组合数(包含 0 个组合在内)。

只要在 r 为偶数的组合和 r 为奇数的组合之间建立起一一对应关系就证明了这等式。以 4 个元素 a、b、c、d 的一切组合为例。r 为奇数的组合有

$$a,\ b,\ c,\ d,\ abc,\ abd,\ acd,\ bcd;$$

r 为偶数的组合有

$$\phi,\ ab,\ ac,\ ad,\ bc,\ bd,\ cd,\ abcd.$$

其中 ϕ 表示取零个元素组合. 从 n 个元素中取 r 个组合，r 可以有不同的值. 但就元素 a 而言，只有含有 a 和不含有元素 a 两类。r 为奇数的组合若含有 a，去掉 a 便得一 r 为偶数的组合. 例如 abc 去掉 a 得 bc。r 为奇数的组合中不含元素 a 的组合，加上元素 a 便构成一个 r 为偶数的组合。例如 bcd 加上 a 得 $abcd$ 如表 1-8-2。

表 1-8-2

r 为奇数的组合	a	b	c	d	abc	abd	acd	bcd
r 为偶数的组合	ϕ	ab	ac	ad	bc	bd	cd	$abcd$

等式 7：

$$\binom{m+n}{r}=\binom{m}{0}\binom{n}{r}+\binom{m}{1}\binom{n}{r-1}+\cdots+\binom{m}{r}\binom{n}{0}.$$

$$r \leqslant \min(m, n). \qquad (1\text{-}8\text{-}7)$$

组合意义 1： 设从 $m+n$ 个有标志的球中取 r 个球组合，这 $m+n$ 个球中 m 个是红的，n 个是蓝的，则一切组合不外乎以下几种可能：r 个球都是蓝的无一红的，有 $\binom{m}{0}\binom{n}{r}$ 种方案；$r-1$ 个球是蓝的，1 个红的，则有 $\binom{m}{1}\binom{n}{r-1}$ 种方案；……；最后是 r 个红的，无一蓝的，有 $\binom{m}{r}\binom{n}{0}$ 种方案。依据加法法则得等式 7。

组合意义 2： 等式左端相当于从 $(0,0)$ 点到 $(m+n-r, r)$ 点的路径数。从 $(0,0)$ 点到 $(m+n-r, r)$ 点的路径必须穿过 PQ 线上的格子点，其中 P 点坐标为 $(m-r, r)$，Q 点坐标为 $(m, 0)$。

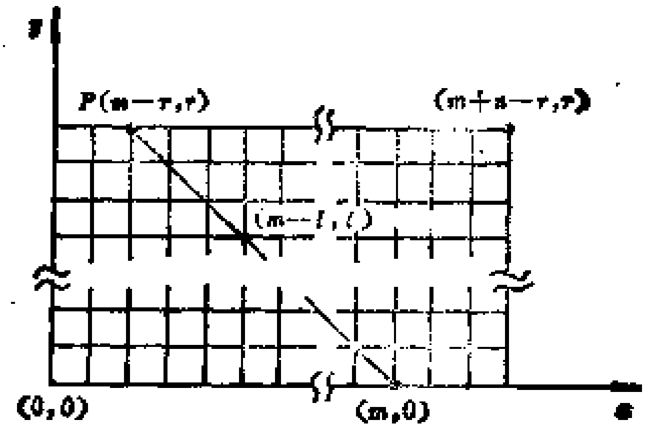


图 1-8-5

PQ 线上的格子点坐标为

$$(m-l, l), \quad l = 0, 1, 2, \cdots, r.$$

由 $(0,0)$ 点到 $(m-l, l)$ 点的路径数为

$$\binom{m}{l}.$$

从 $(m-l, l)$ 点到 $(m+n-r, r)$ 点的路径数为

$$\binom{m+n-r-(m-l)+r-l}{r-l}=\binom{n}{r-l}.$$

依据乘法法则，从(0,0)点出发，经$(m-l,l)$点到$(m+n-r,r)$点的路径数$=\binom{m}{l}\binom{n}{r-l}$，依加法法则可得

$$\binom{m+n}{r}=\binom{m}{0}\binom{n}{r}+\binom{m}{1}\binom{n}{r-1}+\cdots+\binom{m}{r}\binom{n}{0}.$$

等式 8：

$$\binom{m+n}{m}=\binom{m}{0}\binom{n}{0}+\binom{m}{1}\binom{n}{1}+\cdots+\binom{m}{m}\binom{n}{m}.$$

$$m\leqslant n. \tag{1-8-8}$$

等式 7 中，若 $m\leqslant n$，$r=m$，有

$$\binom{m+n}{m}=\binom{m}{m}\binom{n}{0}+\binom{m}{m-1}\binom{n}{1}+\cdots+\binom{m}{0}\binom{n}{m}$$

$$=\binom{m}{0}\binom{n}{0}+\binom{m}{1}\binom{n}{1}+\cdots+\binom{m}{m}\binom{n}{m}.$$

§9 应用举例

例1. 7个科学工作者从事一项机密的技术研究，他们的工作室装有电子锁，每位科学工作者都有打开电子锁用的“钥匙”。为了安全起见，必须有4位在场时才能打开大门。试问该电子锁至少应具备多少个特征？每位科技工作者的“钥匙”至少应有多少种特征？

解： 任意3个人在一起，至少缺少一种特征，故不能打开电子锁。由7个人中的3个人组合的组合数为$C(7,3)$，故电子锁至少应有$C(7,3)=\dfrac{7\times6\times5}{3\times2}=35$种特征。这样使得任意3人在场时至少缺少一个特征而打不开门。

对于其中任何一个人，其余 6 个人中任意 3 个人在场，至少缺少一个他所具有的特征而无法打开大门。所以每个人的“钥匙”至少要有 $C(6,3)=\dfrac{6\times5\times4}{3\times2}=20$ 种特征。

例 2. 4 个全同的质点，总能量为 $4E_0$，其中 E_0 是常数。每个质点的能级可能为 kE_0，$k=0,1,2,3,4$。

(1) 若能级为 kE_0 的质点可以有 k^2+1 种状态，而且服从 Bose-Einstein 分布，即同能级的质点可以处于相同的状态。试问共有多少种不同的图象？

(2) 若能级为 kE_0 的质点可以有 $2(1+k^2)$ 种状态，而且服从 Fermi-Dirac 分布，即不允许同能级的两个质点有相同状态，问有多少种不同的图象？

解： 总能量为 $4E_0$ 的 4 个质点有以下 5 种可能分布：

$$(0,0,0,4),\quad(0,0,1,3),\quad(0,0,2,2),$$
$$(0,1,1,2),\quad(1,1,1,1).$$

其中 (n_1,n_2,n_3,n_4) 表示 4 个质点的能级分别为 n_1、n_2、n_3、n_4，满足 $n_1+n_2+n_3+n_4=4$。例如(0,0,2,2)表示 2 个质点为 0 级，2 个质点为 $2E_0$ 级。

(1) 依据 kE_0 能级的质点可以有 $1+k^2$ 种状态，故各能级的状态为

能级 k	0	1	2	3	4
状态数	1	2	5	10	17

因为同能级的两个质点可以处于相同的状态，故分别讨论各种分布如下：

① 对应于(0,0,0,4)有 $1\times17=17$ 种图象。

② 对应于(0, 0, 1, 3)分布，依乘法法则有 $1\times2\times10=20$

种不同图象。

③ 对应于(0,0,2,2)分布，依乘法法则可得不同图象数为

$$1\times\binom{6}{2}=\frac{6\times5}{2\times1}=15.$$

因在 $2E_0$ 能级有 2 个质点，而 $k=2$ 时有 5 种状态。但允许有四个质点同在一种状态，故相当于从 5 种状态中取 2 个作为允许重复的组合，其组合数为

$$\binom{5+2-1}{2}=\binom{6}{2}.$$

④ 对应于(0,1,1,2)分布状态的不同图象数为

$$\binom{2+2-1}{2}\binom{5}{1}=\binom{3}{2}\cdot5=3\times5=15.$$

⑤ 对应于(1,1,1,1)分布状态的不同图象数为

$$\binom{2+4-1}{4}=\binom{5}{4}=5.$$

由加法法则可得总的图象数为

$$N=17+20+15+15+5=72.$$

(2) 若不允许同能级的两个质点处于同一状态。因能级 kE_0 的状态数为 $2(1+k^2)$，即

能级 k	0	1	2	3	4
状态数	2	4	10	20	34

分别对各种分布讨论如下：

① 由于 0 级只有两种状态，而每种状态不允许有两个质点，所以(0,0,0,4)分布是不可能出现的，即(0,0,0,4)状态的分布图象数为 0。

② 对应于(0,0,1,3)分布状态的不同图象数为

$$4\times20=80.$$

③ 对应于(0,1,1,2)分布状态的不同图象数为

$$2\times\binom{4}{2}\times 10=120.$$

④ 对应于(0,0,2,2)分布状态的不同图象数为

$$\binom{10}{2}=\frac{9\times 10}{2}=45.$$

⑤ 对应于(1,1,1,1)分布状态的不同图象数为

$$\binom{4}{4}=1.$$

根据加法法则总的图象数为

$$N=80+120+45+1=246.$$

例3. 三个全同的质点分布在两个全同的势阱里，总能量为 $3E_0$。设能级为 kE_0 的质点有 $2(k^2+1)$ 种状态，并服从 Fermi-Dirac 分布。问共有多少种不同的图象？根据 Fermi-Dirac 分布，同一能级的两个质点不允许处于相同的状态，但不在同一势阱里的两个质点是独立的，即不同势阱里的同能级的两个质点可以处于同一状态。

解: 三个全同的质点分布在两个势阱，只有两种情况。(*a*)三个质点同在一个势阱里；(*b*)一个势阱里有一个质点，其余两个质点同在另一个势阱里。分别讨论如下。

(*a*) 三个质点同在一个势阱。其分布状态可能有：(0,0,3)，(0,1,2)，(1,1,1)三种。不同的图象数为

$$N_a=20+2\times 4\times 10+\binom{4}{3}$$

$$=20+80+4=104.$$

(*b*) 三个质点分在两个势阱，总能级为 $3E_0$ 的分布状态有：(0)(0,3)，(0)(1,2)，(1)(0,2)，(1)(1,1)，(2)(1,0)，(3)(0,0)。其中(0)(0,3)表示一个势阱里有一个质点，而且其能级为 0；另外一

个势阱里有两个质点，能级分别为 0 和 $3E_0$。余此类推，不一一解说。

$$\therefore\quad N_b = 2\times2\times20+2\times4\times10+4\times2\times10$$
$$+4\times\binom{4}{2}+10\times2\times4+20$$
$$=80+80+80+80+24+20=364.$$

根据加法法则得不同图象数

$$N = N_a + N_b = 104 + 364 = 468.$$

例 4. 从(0,0)点到达(m,n)点 $(m<n)$，要求中间所经过的每一个格子点 (a,b) 恒满足 $b>a$ 关系，问有多少条路径？

解： §3 的例 1 给出从 (0, 0) 点到 (m, n) 点的路径数为 $\binom{m+n}{m}$，本问题排除了其中碰到或穿过 $y=x$ 上格子点的路径.

从(0,0)到(m,n)点的路径中若排除经过点(a,b)，$b\leqslant a$，的可能性. 则第一步必须从(0,0)到(0,1). 因此问题等价于求满足条件的从(0,1)点到(m,n)点的路径数.

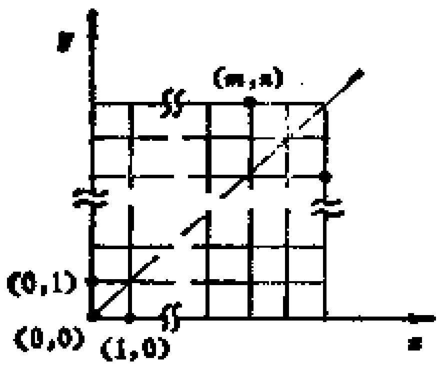


图 1-9-1

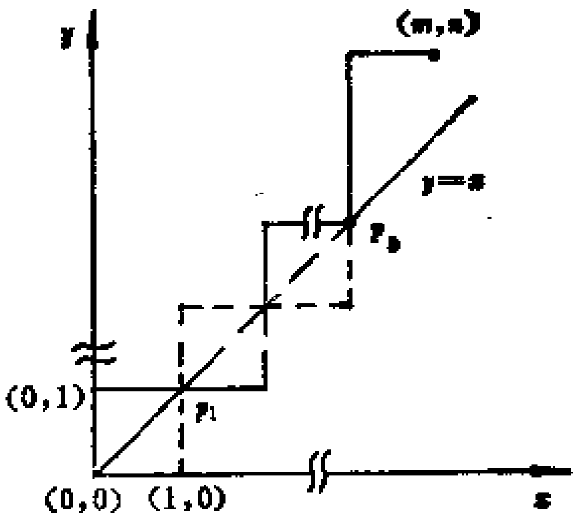


图 1-9-2

由于 $m<n$，显然从(1,0)点到(m,n)点的每一条路径，必然穿过 $y=x$ 上的格子点. 下面建立起从(1,0)到 (m,n) 点每一条

路径，与从(0,1)到 (m,n) 点但经过 $y=x$ 线上的格子点的路径间的一一对应关系。

从图 1-9-2 可见，若从(1,0)到 (m,n) 点的某一路径与 $y=x$ 的交点从左而右依次为 $P_1, P_2, \cdots, P_k$，设 P_k 是最后一个在 $y=x$ 上的格子点。作(0,1)点到 P_k 点的一条道路（实线）使之与上述的从(1,0)点到 P_k 点的路径（虚线）关于直线 $y=x$ 对称。于是对从(1,0)点到 (m,n) 点的一条路径，有一条从(0,1)到 (m,n) 点，但过 $y=x$ 上的点的路径与之对应。反之对从(1,0)点到 (m,n) 点的一条路径（必穿过 $y=x$ 上的格子点），必存在从(0,1)到 (m,n) 点的路径与之对应。

故所求的路径数 $N=$ (0,1)点到 (m,n) 点的路径数 $-$(1,0)点到 (m,n) 点的路径数。

$$\therefore\ N=\binom{m+n-1}{m}-\binom{m-1+n}{m-1}$$
$$=(m+n-1)!\left[\frac{1}{m!(n-1)!}-\frac{1}{(m-1)!n!}\right]$$
$$=\frac{(m+n-1)!}{m!n!}(n-m).$$

例 5. 若 a、b 两个用 n 位二进制数表示的码，设

$$a=a_1a_2\cdots a_n,\quad b=b_1b_2\cdots b_n.$$

如若 $a_i\neq b_i$ 的个数为 l，则用 $d(a,b)=d(b,a)=l$ 表之，称为 a、b 码的 Hamming 距离。关于 Hamming 距离下面的三角不等式成立，即

$$d(a,b)+d(b,c)\geqslant d(a,c).$$

设 $c=c_1c_2\cdots c_n$，$d(a,c)=l$。如若 $a_i\neq c_i$，由于每位只有两种可能，或 0 或 1，所以有以下两种情况：(1) $a_i\neq b_i$，但 $b_i=c_i$；(2) $a_i=b_i$，$b_i\neq c_i$。由于假定 $d(a,c)=l$，其中 l_1 位满足条件(1)，l_2 位满足条件(2)，$l=l_1+l_2$。

根据 Hamming 距离的定义有

$$d(a,b) \geqslant l_1,\ d(b,c) \geqslant l_2.$$

故 $$d(a,b)+d(b,c) \geqslant d(a,c).$$

如若 a' 与码 a 的距离 $\leqslant r$，则认为 a' 是 a 的错误而予以纠正，即 a' 当作是码 a 而加以处理。这样任意两个码 a、b 之间的 Hamming 距离不得小于 $2r+1$，否则将可以构造 c，使之满足

$$d(a,c)=r,\ d(c,b)=r.$$

即 c 与码 a 和 b 的距离相等，都等于 r，无法纠正。因若 a 与 b 的距离为 $2r$，即其中有 $2r$ 位满足 $a_i \neq b_i$。从这 $2r$ 位中选取 r 位使之保持与 a 相同，另 r 位与 b 相同。这样所得的 c 便是所求。

反之，若有一组码，其中两两的 Hamming 距离不小于 $2r+1$。如若 a' 与 a 的距离 $\leqslant r$，由于 $d(a,a')+d(a',b) \geqslant d(a,b)$，可以证明 a' 与其它码的距离大于 r。

有一组 Hamming 距离不小于 $2r+1$ 的 n 位二进制码：

$$a_1,a_2,\cdots,a_M.$$

n 位二进数总数为 2^n，2^n 个二进数中与其中 a_i 距离为 k 的数的个数显然为 $\binom{n}{k}$，即从 a_i 中取出 k 位加以改变而得。故与 a_i 的距离小于等于 r 的数的个数为

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{r}=\sum_{k\leqslant r}\binom{n}{k}.$$

凡是与 a_i 的距离小于等于 r 的二进数都认为是由于 a_i 的错误引起的。令 $U_i=\{a \mid d(a,a_i)\leqslant r\}$。

根据距离的三角不等式，可知 2^n 个数中每个数最多只能属于 $U_1,U_2,\cdots,U_M$ 中的一个。

$$M\cdot\left[\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{r}\right]\leqslant 2^n,$$

$$\therefore\quad M \leqslant \frac{2^n}{\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{r}}.$$

例 6. 脱氧核糖核酸(DNA)的分子是由A(腺嘌呤),G(鸟嘌呤),C(胞嘧啶)和T(胸腺嘧啶)4种碱基核苷酸,以不同数目和种类排列成两条多核苷酸单链,这两条单链之间通过氢键把配对的碱基连接起来,形成双螺旋结构。连接过程总是A和T配对,G和C配对.显然长度为n的核苷酸链共有4^n种不同方式。生物的遗传信息是由DNA分子中4个碱基核苷酸象电报密码似的以不同的排列顺序记录下来,它载着人类的全部基因或全部遗传信息。所谓基因就是DNA上一小段,平均长度为900—1500个碱基对。人的DNA约有3×10^9碱基对。

核糖核酸(RNA)也是一种遗传物质,它是由A,G,C,U(尿嘧啶)4种碱基核苷酸排列而成的多核苷酸单链。

通过基因将它的遗传信息传递给RNA,然后再传给蛋白质来表现其功能。

(1) 蛋白质分子中有20种氨基酸,在RNA中以一定顺序相连的3个核苷酸决定1种氨基酸,三联体遗传密码有$4^3=64$个排列方式。它保证了20种氨基酸密码的需要。

(2) 例如RNA链:

CCGGUCCGAAAG

酶将它分解为G片断(即利用G将RNA分解)。

CCG, G, UCCG, AAAG.

显然有$4!=24$种不同的RNA链有与此相同的G片段。

若利用U,C酶将上述的RNA链分解成U,C片段:

C, C, GGU, C, C, GAAAG

由于GAAAG片段只能在最后出现,而且C出现4次,故有

$$C(5,4)=5$$

种不同的核苷酸链，它的 U，C 片段是上述的 C，C，C，C，GGU，GAAAG．它们是

CCCCGGUGAAAG

CCCGGUCGAAAG

CCGGUCCGAAAG

CGGUCCCGAAAG

GGUCCCCGAAAG

§10 Stirling 近似公式

在组合数学中经常遇到 $n!$ 计数，随着 n 的增大，结果增长迅速．Stirling 公式给出一个求 $n!$ 的近似公式，它对从事计算和理论分析都是有意义的．Stirling 公式是这样的，

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

这里符号～表示它的两端的比值，随着 n 的无限增大而趋于 1，也就是

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\,(n/e)^n}=1.$$

即相对误差随着 n 的趋向无穷而趋于零．然而绝对误差并非如此，实际上

$$\lim_{n\to\infty}\left[n!-\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right]=\infty.$$

1. Wallis 公式

令 $I_k=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^k x\,dx,\ k=1,2,\cdots.$

显然，$I_0=\frac{\pi}{2},\ I_1=1.$

$k \geqslant 2$ 时，

$$I_k = -\cos x \sin^{k-1} x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (k-1)\cos^2 x \sin^{k-2} x dx$$

$$= 0 + (k-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x)\sin^{k-2} x dx$$

$$= (k-1)(I_{k-2} - I_k)$$

故

$$I_k = \frac{k-1}{k} I_{k-2}. \qquad (1\text{-}10\text{-}1)$$

令

$$n!! = \begin{cases} 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (n-2) \cdot n, & n \text{ 是奇数}, \\ 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot (n-2) \cdot n, & n \text{ 是偶数}. \end{cases}$$

由(1-10-1)，

$$I_k = \begin{cases} \dfrac{(k-1)!!}{k!!} I_1, & k \text{ 是奇数}, \\ \dfrac{(k-1)!!}{k!!} I_0, & k \text{ 是偶数}. \end{cases} \qquad (1\text{-}10\text{-}2)$$

当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时，

$$\sin^{k+1} x < \sin^k x.$$

因而

$$I_{2k+1} < I_{2k} < I_{2k-1}, \quad k = 1, 2, \cdots.$$

由(1-10-2)，

$$\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} < \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \frac{\pi}{2} < \frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!},$$

$$1 < \frac{\frac{\pi}{2}}{\left[\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right]^2 \cdot \frac{1}{2k+1}} < \frac{2k+1}{2k} \xrightarrow[k \to \infty]{} 1.$$

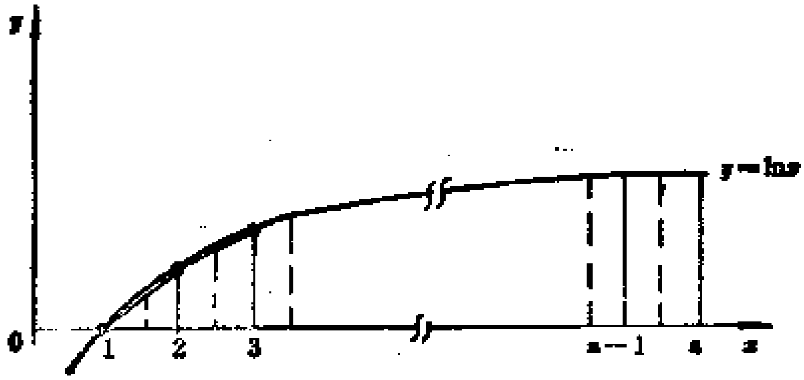
所以

$$\lim_{k\to\infty}\left[\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right]^2\frac{1}{2k+1}=\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{k\to\infty}\left[\frac{(2k)!!(2k)!!}{(2k)!}\right]^2\frac{1}{2k+1}=\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{k\to\infty}\left[\frac{2^{2k}(k!)^2}{(2k)!}\right]^2\frac{1}{2k+1}=\frac{\pi}{2}. \qquad (1\text{-}10\text{-}3)$$

2. Stirling 公式



(a)

图 1-10-1

令

$$A_n=\int_1^n \ln x\,dx = x\ln x\Big|_1^n-\int_1^n dx = n\ln n - n + 1 \quad (1\text{-}10\text{-}4)$$

$$t_n=\frac{1}{2}\ln 1+\ln 2+\cdots+\ln(n-1)+\frac{1}{2}\ln n$$

$$=\ln(n!)-\frac{1}{2}\ln n \qquad (1\text{-}10\text{-}5)$$

t_n 的几何意义是由 x 轴，$x=n$，以及连接 $(1,0)$，$(2,\ln 2)$，$\cdots$，$(n-1,\ln(n-1))$，$(n,\ln n)$ 诸点而成的折线围成的面积。

$$T_n=\frac{1}{8}+\ln 2+\cdots+\ln(n-1)+\frac{1}{2}\ln n \quad (1\text{-}10\text{-}6)$$

T_n 是由三部分面积之和构成的。一是曲线 $y=\ln x$ 在 $x=k$ 点的切线和 x 轴，以及 $x=k-\frac{1}{2}$，$x=k+\frac{1}{2}$ 包围的梯形，当 k 分别为 $2,3,\cdots,n-1$ 时的面积之和；一是由 $y=\ln x$ 在 $x=1$ 点的切线，$x=3/2$ 线，以及 x 轴围成的梯形；另一是由 $y=\ln n$，$x=n-\frac{1}{2}$，$x=n$ 及 x 轴包围的矩形面积。因而有

$$t_n < A_n < T_n \tag{1-10-7}$$

$$0 \le A_n - t_n < T_n - t_n = \frac{1}{8}$$

令 $b_n = A_n - t_n$。序列 $b_1, b_2, \cdots$ 是单调增，而且有上界，故有极限，令

$$\lim_{n\to\infty} b_n = b_1$$

由(1-10-4)，(1-10-5)得

$$b_n = n\ln n - n + 1 - \ln(n!) + \frac{1}{2}\ln n.$$

$$= \ln n^n - n + 1 - \ln(n!) + \ln\sqrt{n}$$

$$\ln(n!) = 1 - b_n + \ln n^n + \ln\sqrt{n} - \ln e^n$$

$$\therefore \quad n! = e^{1-b_n}\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \tag{1-10-8}$$

令 $\beta_n = e^{1-b_n}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n = \beta$。

将(1-10-8)代入(1-10-3)，整理得

$$\beta = \sqrt{2\pi}.$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\beta_n\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}{n!} = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}{n!}=1.$$

但是

$$\lim_{n\to\infty}\left[n!-\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right]=\infty.$$

令 $a_n=\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$，将 $n!$，a_n 的一些特定值列成表 1-10-1

表 1-10-1

n	$n!$	a_n	$n!/a_n$
10	3.6288×10^{6}	3.5987×10^{6}	1.0084
20	2.4329×10^{18}	2.4228×10^{18}	1.0042
30	2.6525×10^{32}	2.6452×10^{32}	1.0028
40	8.1592×10^{47}	8.1422×10^{47}	1.0021
50	3.0414×10^{64}	3.0363×10^{64}	1.0017
60	8.3210×10^{81}	8.3094×10^{81}	1.0014

例： $60!\approx6.28318(22.072767)^{60}$

$\approx19.416251\times4.2796351\times10^{80}$

$\approx8.34\times10^{81}$

60个字符的全排列，若用每秒钟生成 10^7 个排列的超高速计算机需要时间为

$T=60!/\{365\times24\times3600\times10^7\}$

$=8.34\times10^{81}/3.15\times10^{14}$

$=2.65\times10^{67}$ 年。

习 题

1. 证任一正整数 n 可唯一地表成如下形式：

$$n=\sum_{i\geq1}a_i i!,\ 0\leqslant a_i\leqslant i,\ i=1,2,\cdots.$$

2. 证 $nC(n-1,r)=(r+1)C(n,r+1)$。并给出组合意义。

3. 证 $\sum_{k=1}^{n} kC(n,k)=n2^{n-1}$。

4. 有 n 个不同的整数，从中取出两组来，要求第一组数里的最小数大于第二组的最大数，问有多少种方案？

5. 六个引擎分列两排，要求引擎的点火的次序两排交错开来，试求从一特定引擎开始点火有多少种方案。

6. 试求从 1 到 1000000 的整数中，0 出现了多少次？

7. n 个男 n 个女排成一男女相间的队伍，试问有多少种不同的方案？若围成一圆桌坐下，又有多少种不同的方案？

8. n 个完全一样的球，放到 r 个有标志的盒子，$n\geqslant r$，要求无一空盒，试证其方案数为 $\binom{n-1}{r-1}$。

9. 设 $n=p_1^{l_1}p_2^{l_2}\cdots p_l^{l_l}$，$p_1$、$p_2$、…、$p_l$ 是 l 个不同的素数，试求能整除尽数 n 的正整数数目。

10. 试求 n 个完全一样的骰子掷出多少种不同的方案？

11. 凸 10 边形的任意三个对角线不共点，试求这凸 10 边形的对角线交于多少个点？又把所有的对角线分割成多少段？

12. 试证一整数是另一个整数的平方的必要条件是除尽它的数目为奇数。

13. 统计力学需要计算 r 个质点放到 n 个盒子里去，并分别服从下列假定之一，问有多少种不同的图象。假设盒子始终是不同的。

(a) Maxwell-Boltzmann 假定：r 个质点是不同的，任何盒子可以放任意数个。

(b) Bose-Einstein 假定：r 个质点完全相同，每一个盒子可以放任意数个。

(c) Fermi-Dirac 假定：r 个质点都完全相同，每盒不得超过一个。

14. 从 26 个英文字母中取出 6 个字母组成一字，若其中有 2 或 3 个母音，问分别可构成多少个字(不允许重复)？

15. 给出 $\binom{n}{m}\binom{r}{0}+\binom{n-1}{m-1}\binom{r+1}{1}+\binom{n-2}{m-2}\binom{r+2}{2}+\cdots$

$$+\binom{n-m}{0}\binom{r+m}{m}=\binom{n+r+1}{m}$$的组合意义。

16. 给出 $\binom{r}{r}+\binom{r+1}{r}+\binom{r+2}{r}+\cdots+\binom{n}{r}=\binom{n+1}{r+1}$的组合意义。

17. 证明：

$$\binom{m}{0}\binom{m}{n}+\binom{m}{1}\binom{m-1}{n-1}+\cdots+\binom{m}{n}\binom{m-n}{0}=2^n\binom{m}{n}.$$

18. 从 n 个人中选 r 个围成一圆圈，问有多少种不同的方案？

19. 分别写出按照字典序由给定排列计算其对应序号的算法及由给定序号计算其对应排列的算法。

20. (a) 按照第 19 题的要求，写出邻位对换法（排列的生成算法之二）的相应算法。

(b) 写出按照邻位对换法由给定排列生成其下一个排列的算法。

21. 对于给定的正整数 n，证明当

$$k=\begin{cases}\dfrac{n-1}{2},\quad \dfrac{n+1}{2} & 若\ n\ 是奇数\\[2ex] \dfrac{n}{2} & 若\ n\ 是偶数\end{cases}$$

时，$C(n,k)$ 是最大值。

22. (a) 用组合方法证明 $\dfrac{(2n)!}{2^n}$ 和 $\dfrac{(3n)!}{2^n\cdot 3^n}$ 都是整数。

(b) 证明 $\dfrac{(n^2)!}{(n!)^{n+1}}$ 是整数。

23. (a) 在 $2n$ 个球中，有 n 个相同． 求从这 $2n$ 个球中选取 n 个的方案数。

(b) 在 $3n+1$ 个球中，有 n 个相同．求从这 $3n+1$ 个球中选取 n 个的方案数。

24. 证明在由字母表{0,1,2}生成的长度为 n 的字符串中，

(a) 0 出现偶数次的字符串有 $\dfrac{3^n+1}{2}$ 个；

(b) $\binom{n}{0}2^n+\binom{n}{2}2^{n-2}+\cdots+\binom{n}{q}2^{n-q}=\dfrac{3^n+1}{2}$,

其中 $q = 2\left[\frac{n}{2}\right]$.

25. 5 台教学机器 m 个学生使用，使用第 1 台和第 2 台的人数相等，有多少种分配方案？

26. 在由 n 个 0 及 n 个 1 构成的字符串中，任意前 k 个字符中，0 的个数不少于 1 的个数的字符串有多少？

27. 在 1 到 n 的自然数中选取不同且互不相邻的 k 个数，有多少种选取方案？

28. (a) 在 5 个 0，4 个 1 组成的字符串中，出现 01 或 10 的总次数为 4 的，有多少个？

(b) 在 m 个 0，n 个 1 组成的字符串中，出现 01 或 10 的总次数为 k 的，有多少个？

第二章　母函数与递推关系

§1　母　函　数

递推关系是计数的一个强有力工具，特别在作算法分析时是必需的。递推关系的求解主要是利用母函数。当然母函数尚有其它用处，但这里主要是介绍解递推关系上的应用。例如

$$(1+a_1x)(1+a_2x)\cdots(1+a_nx)$$
$$=1+(a_1+a_2+\cdots+a_n)x+(a_1a_2+a_1a_3+\cdots$$
$$+a_{n-1}a_n)x^2+\cdots+a_1a_2\cdots a_nx^n. \tag{2-1-1}$$

x^2 项的系数 $a_1a_2+a_1a_3+\cdots+a_{n-1}a_n$ 中所有的项包含了从 n 个元素 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中取两个组合的全体；同理 x^3 项系数 $a_1a_2a_3+a_1a_2a_4+\cdots+a_{n-2}a_{n-1}a_n$ 包含了从 n 个元素 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中取 3 个组合的全体。依此类推。

若令 $a_1=a_2=\cdots=a_n=1$，在 (2-1-1) 式中 x^2 项系数：

$$a_1a_2+a_1a_3+\cdots+a_{n-1}a_n$$

中每一个组合有 1 个贡献，其它各项余此类推。故有

$$(1+x)^n=1+C(n,1)x+C(n,2)x^2+\cdots+C(n,n)x^n. \tag{2-1-2}$$

另一方面

$$(1+x)^m(1+x)^n=(1+x)^{m+n},$$

$\therefore\quad [C(m,0)+C(m,1)x+\cdots+C(m,m)x^m][C(n,0)+$

$$+ C(n,1)x + \cdots + C(n,n)x^n] = [C(m+n,0)+$$
$$+ C(m+n,1)x + \cdots + C(m+n,m+n)x^{m+n}].$$

比较等号两端 x 项对应系数，可得一等式

$$C(m+n,r) = C(m,0)C(n,r) + C(m,1)C(n,r-1)$$
$$+ \cdots + C(m,r)C(n,0).$$

这个等式在第一章§8已给出，并给以组合的解释。这里不过给出另一种比较简单的证明。

同样对于 $(1+x)^n\left(1+\frac{1}{x}\right)^m$，(设 $n \geqslant m$)，用类似方法可得等式

$$C(m+n,m) = C(n,0)C(m,0) + C(n,1)C(m,1)$$
$$+ \cdots + C(n,m)C(m,m). \qquad (2\text{-}1\text{-}3)$$

方法如下

$$(1+x)^n\left(1+\frac{1}{x}\right)^m = x^{-m}(1+x)^{m+n}.$$

$$\therefore \quad [C(n,0) + C(n,1)x + \cdots + C(n,n)x^n]$$
$$\cdot [C(m,0) + C(m,1)x^{-1} + \cdots + C(m,m)x^{-m}]$$
$$= x^{-m}[C(m+n,0) + C(m+n,1)x$$
$$+ C(m+n,2)x^2 + C(m+n,m+n)x^{m+n}].$$

比较等号两端的常数项，即得公式(2-1-3)。

又如等式

$$(1+x)^n = C(n,0) + C(n,1)x + C(n,2)x^2$$
$$+ \cdots + C(n,n)x^n,$$

令 $x=1$ 可得

$$C(n,0) + C(n,1) + \cdots + C(n,n) = 2^n. \qquad (2\text{-}1\text{-}4)$$

(2-1-2)式等号的两端对 x 求导可得

$$n(1+x)^{n-1} = C(n,1) + 2C(n,2)x + 3C(n,3)x^2$$
$$+ \cdots + nC(n,n)x^{n-1}. \qquad (2\text{-}1\text{-}5)$$

等式(2-1-5)两端令 $x=1$,得

$$C(n,1)+2C(n,2)+3C(n,3)+\cdots+nC(n,n)$$
$$=n2^{n-1}. \qquad (2\text{-}1\text{-}6)$$

类似的办法可以得到

$$C(n,1)x+2C(n,2)x^2+3C(n,3)x^3+\cdots+nC(n,n)x^n$$
$$=nx(1+x)^{n-1}$$

$$\therefore\quad C(n,1)+2^2C(n,2)+3^2C(n,3)+\cdots+n^2C(n,n)$$
$$=n(n+1)2^{n-2}. \qquad (2\text{-}1\text{-}7)$$

还可以类似地推出一些等式，但通过上面一些例子已可见函数 $(1+x)^n$ 在研究序列 $C(n,0)$, $C(n,1)$, $\cdots$, $C(n,n)$的关系时所起的作用。对于其它序列也有同样结果．现引进母函数概念如下。

定义： 对于序列 a_0, a_1, a_2, $\cdots$, 构造一函数

$$G(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots,$$

称函数 $G(x)$ 是序列 a_0, a_1, a_2, $\cdots$ 的母函数。

例如 $(1+x)^n$ 是序列

$$C(n,0),\ C(n,1),\ \cdots,\ C(n,n)$$

的母函数。

如若已知序列 a_0, a_1, a_2, $\cdots$, 则对应的母函数 $G(x)$ 便可根据定义给出．反之，如若已求得序列的母函数 $G(x)$，则该序列也随之确定。

序列 a_0, a_1, $\cdots$ 可记为 $\{a_n\}$.

§2 递 推 关 系

利用递推关系进行计数这个方法在算法分析中经常用到，举例说明如下．

例 1. Hanoi 塔问题：这是组合数学中的著名的问题。n 个

圆盘依其半径大小，从下而上套在柱 A 上，如图 2-2-1 所示。每次只允许取一个转移到柱 B 或 C 上，而且不允许大盘放在小盘上方。若要求把柱 A 上的 n 个盘转移到 C 柱上，请设计一种方法来，并估计要移动几个盘次。现在只有 A，B，C 三根柱子可供使用。

Hanoi 塔是个典型的问题，第一步要设计算法，进而估计它的复杂性，即估计工作量。

算法:

$n=2$ 时，第一步先把最上面一个圆盘套在 B 上；第二步把下面一个圆盘转移到 C 上；最后再从 B 上的一个圆盘转移到 C 上。到此转移完毕。

假定 $n-1$ 个盘子的转移算法已经确定。

对于一般 n 个圆盘问题，先把上面的 $n-1$ 个盘子转移到 B 上，再把最后一个盘子转移到 C 上，然后把 B 上的 $n-1$ 个圆盘转移到柱 C 上，转移完毕。

上述的算法是递归地运用。$n=2$ 时已给出了算法；$n=3$ 时，第一步便利用算法把上面两个盘移到柱 B 上，第二步再把第三个圆盘转移到柱 C 上；最后把柱 B 上两个圆盘转移到柱 C 上。$n=4,5,\cdots$ 依此类推。图 2-2-1 形象地给出 $n=4$ 的转移过程。

算法分析： 令 $h(n)$ 表示 n 个圆盘所需要的转移盘次。根据算法先把前面 $n-1$ 个盘子转移到 B 上；然后把第 n 个盘子转到 C 上；最后再一次将 B 上的 $n-1$ 个盘子转到 C 上。

$n=2$ 时，算法是对的，因此，$n=3$ 时算法是对的。依此类推。于是有

$$h(n)=2h(n-1)+1,\ h(1)=1, \tag{2-2-1}$$

令
$$H(x)=h(1)x+h(2)x^2+h(3)x^3+\cdots,$$

$H(x)$ 是序列 $h(1)$，$h(2)$，$h(3)$，$\cdots$ 的母函数。给定了序列，对应的母函数也就确定。反过来也一样，求得了母函数，对应

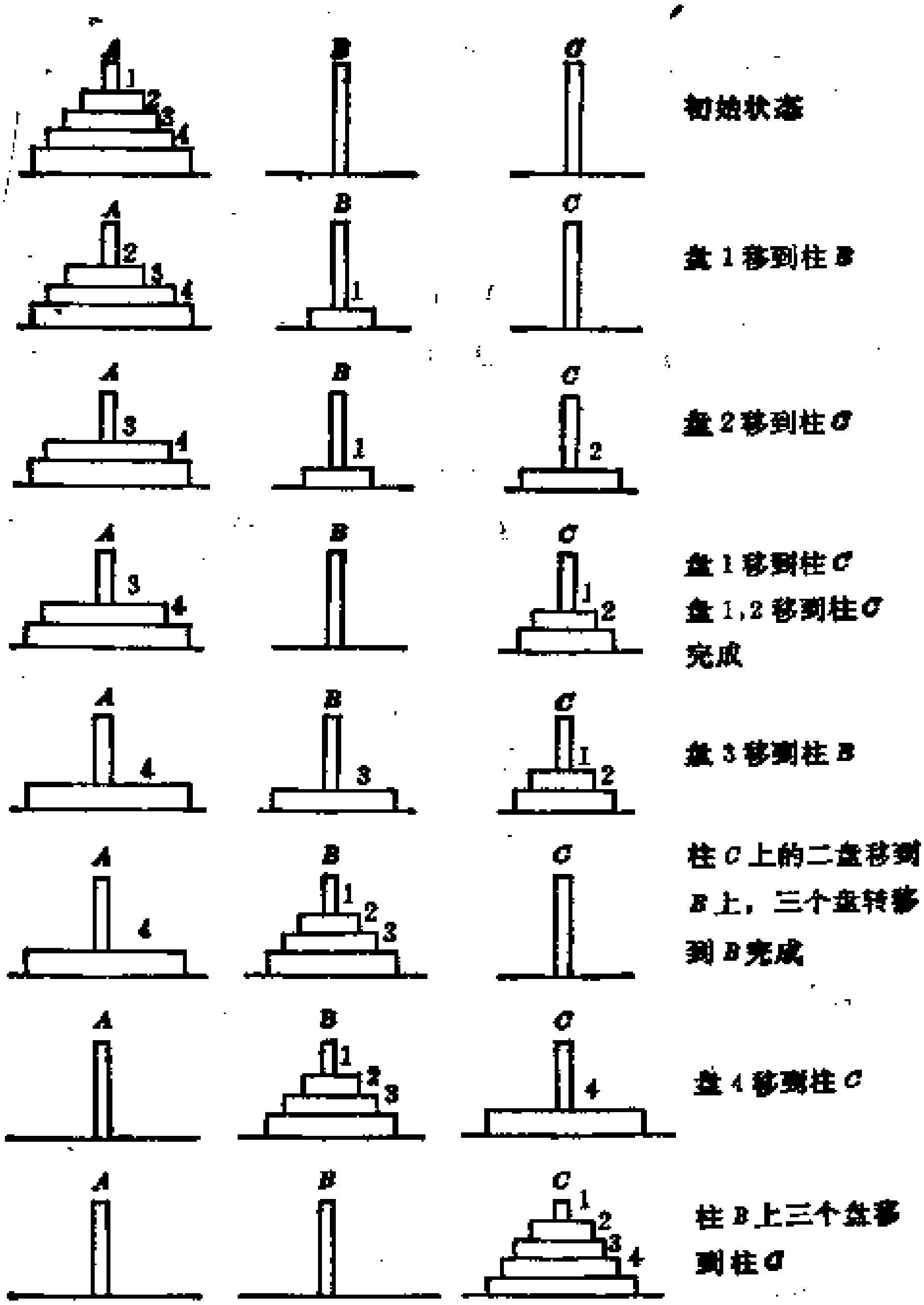


图 2-2-1

的序列也就可得而知。当然，利用递推关系(2-2-1)式也可依次求得 $h(2),h(3),\cdots$，这样的连锁反应关系，叫做递推关系。下面介绍如何从(2-2-1)式求得母函数 $H(x)$ 的一种形式算法。所谓形式算法说的是假定这些幂级数在作四则运算时，一如有限项的代

数式一样.

$$
\begin{array}{rl}
 & H(x)=h(1)x+h(2)x^2+h(3)x^3+\cdots, \\
+) & -2xH(x)= \qquad -2h(1)x^2-2h(2)x^3+\cdots, \\
\hline
 & (1-2x)H(x)=h(1)x+[h(2)-2h(1)]x^2+[h(3)-2h(2)]x^3+\cdots,
\end{array}
$$

根据 (2-2-1), $h(1)=1$, $h(3)-2h(1)=1$, $h(4)-2h(3)=1$, ……。

$$\therefore \quad (1-2x)H(x)=x+x^2+x^3+\cdots=\frac{x}{1-x}.$$

或利用递推关系(2-2-1)有

$$
\begin{array}{rl}
 & x^2:\ h(2)=2h(1)+1, \\
 & x^3:\ h(3)=2h(2)+1, \\
+) & \qquad \cdots\cdots\cdots \\
\hline
\therefore & H(x)-x=2xH(x)+\dfrac{x^2}{1-x}.
\end{array}
$$

左端为

$$h(2)x^2+h(3)x^3+\cdots=H(x)-h(1)x=H(x)-x.$$

右端第一项为

$$2h(1)x^2+2h(2)x^3+\cdots=2x[h(1)x+h(2)x^2+\cdots]$$
$$=2xH(x).$$

右端第二项为

$$x^2+x^3+\cdots=\frac{x^2}{1-x}.$$

整理得

$$(1-2x)H(x)=\frac{x^2}{1-x}+x=\frac{x}{1-x}.$$

两种做法所得结果一样. 即

$$H(x)=\frac{x}{(1-x)(1-2x)}.$$

如何从母函数求得序列 $h(1), h(2), \cdots$?下面提供一种化为部分分数的算法。

令
$$H(x)=\frac{A}{1-x}+\frac{B}{1-2x}=\frac{A(1-2x)+B(1-x)}{(1-x)(1-2x)}$$
$$=\frac{(A+B)-(2A+B)x}{(1-x)(1-2x)}.$$
$$\therefore\quad (A+B)-(2A+B)x=x.$$
$$\begin{cases}A+B=0,\\-2A-B=1.\end{cases}\qquad A=-1,\ B=1.$$

即
$$H(x)=\frac{1}{1-2x}-\frac{1}{1-x}$$
$$=(1+2x+2^2x^2+2^3x^3+\cdots)$$
$$-(1+x+x^2+\cdots)$$
$$=(2-1)x+(2^2-1)x^2+(2^3-1)x^3+\cdots$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}(2^k-1)x^k,$$

因
$$H(x)=\sum_{k=1}^{\infty}h(k)x^k,$$
$$\therefore\quad h(k)=2^k-1.$$

例 2. 求 n 位十进制数中出现偶数个 5 的数的个数。

先从分析 n 位十进制数出现偶数个 5 的数的结构入手。$p_1p_2\cdots p_{n-1}$ 是 $n-1$ 位十进制数，若含有偶数个 5，则 p_n 取 5 以外的 0,1,2,3,4,6,7,8,9 九个数中的一个，若 $p_1p_2\cdots p_{n-1}$ 只有奇数个 5，则取 $p_n=5$，使 $p_1p_2\cdots p_{n-1}p_n$ 成为出现偶数个 5 的十进制数。

解法 1:

令 a_n — n 位十进制数中出现偶数个 5 的数的个数，

b_n — n 位十进制数中出现奇数个 5 的数的个数。

故有

$$\begin{cases} a_n = 9a_{n-1} + b_{n-1}, \\ b_n = 9b_{n-1} + a_{n-1}, \end{cases} \quad a_1 = 8, \ b_1 = 1. \qquad (2\text{-}2\text{-}2)$$

(2-2-2)式中的 $a_n = 9a_{n-1} + b_{n-1}$ 表达了含有偶数个5的 n 位十进制数的两个组成部分．$9a_{n-1}$ 表达由含有偶数个5的 $n-1$ 位十进制数 $p_1p_2\cdots p_{n-1}$，令 p_n 取5以外的9个数0，1，2，3，4，6，7，8，9中的一个数构成的．b_{n-1} 项表示当 $p_1p_2\cdots p_{n-1}$ 是含有奇数个5的 $n-1$ 位十进制数，令 $p_n = 5$ 而得 $p_1p_2\cdots p_n$ 是含偶个5的 n 位十进制数．

$b_n = 9b_{n-1} + a_{n-1}$ 也有类似的解释．

(2-2-2)是关于序列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的联立关系．

设序列 $\{a_n\}$ 的母函数为 $A(x)$，序列 $\{b_n\}$ 的母函数为 $B(x)$，即

$$A(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + \cdots,$$

$$B(x) = b_1 + b_2x + b_3x^2 + \cdots,$$

$$\begin{array}{rrl} & A(x) = & a_1 + a_2x + a_3x^2 + \cdots, \\ & -9xA(x) = & \quad -9a_1x - 9a_2x^2 - \cdots, \\ +) & -xB(x) = & \quad -b_1x - b_2x^2 - \cdots, \\ \hline & & (1-9x)A(x) - xB(x) = 8. \end{array}$$

或

$$\begin{array}{rl} x: & a_2 = 9a_1 + b_1, \\ x^2: & a_3 = 9a_2 + b_2, \\ x^3: & a_4 = 9a_3 + b_3, \\ +) & \cdots \cdots\cdots\cdots \\ \hline \end{array}$$

$$A(x) - 8 = 9xA(x) + xB(x),$$

$$\therefore \quad (1-9x)A(x) - xB(x) = 8.$$

又

$$
\begin{aligned}
B(x) &= b_1 + b_2x + b_3x^2 + \cdots, \\
-9xB(x) &= \quad -9b_1x - 9b_2x^2 - \cdots, \\
+)\quad -xA(x) &= \quad -a_1x - a_2x^2 - \cdots,
\end{aligned}
$$

$$(1-9x)B(x) - xA(x) = 1.$$

故得关于母函数 $A(x)$ 和 $B(x)$的联立方程组：

$$
\begin{cases}
(1-9x)A(x) - xB(x) = 8, \\
-xA(x) + (1-9x)B(x) = 1.
\end{cases}
$$

$$
D = \begin{vmatrix} 1-9x & -x \\ -x & 1-9x \end{vmatrix} = (1-9x)^2 - x^2 = 1 - 18x + 80x^2
$$
$$
= (1-8x)(1-10x).
$$

$$
A(x) = \frac{1}{1-18x+80x^2}\begin{vmatrix} 8 & -x \\ 1 & 1-9x \end{vmatrix} = \frac{-71x+8}{(1-8x)(1-10x)}.
$$

$$
B(x) = \frac{1}{(1-8x)(1-10x)}\begin{vmatrix} 1-9x & 8 \\ -x & 1 \end{vmatrix} = \frac{1-x}{(1-8x)(1-10x)}.
$$

$$
A(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{1-8x} + \frac{9}{1-10x}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(7\cdot 8^k + 9\cdot 10^k)x^k.
$$

$$
\therefore \quad a_k = \frac{7}{2}8^{k-1} + \frac{9}{2}10^{k-1}.
$$

解法 2:

$n-1$ 位的十进制数的全体共 $9\times 10^{n-2}$ 个，从中去掉含有偶数个 5 的数，余下的便是 $n-1$ 位中含有奇数个 5 的数。故有

$$
\begin{aligned}
a_n &= 9a_{n-1} + b_{n-1}, \\
b_{n-1} &= 9\times 10^{n-2} - a_{n-1}.
\end{aligned}
$$

$$
\therefore \quad a_n = 8a_{n-1} + 9\times 10^{n-2},\ a_1 = 8.
$$

令

$$
\begin{aligned}
A(x) &= a_1 + a_2x + a_3x^2 + \cdots, \\
+)\quad -8xA(x) &= \quad -8a_1x - 8a_2x^2 - \cdots,
\end{aligned}
$$

$$
(1-8x)A(x) = 8 + (a_2 - 8a_1)x + (a_3 - 8a_2)x^2 + \cdots,
$$

$$\therefore\quad (1-8x)A(x)=8+9x+9\cdot 10x^2+\cdots$$
$$=8+\frac{9x}{1-10x}=\frac{8-71x}{1-10x}.$$

$$从\quad A(x)=\frac{8-71x}{(1-8x)(1-10x)}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{7}{1-8x}+\frac{9}{1-10x}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(7\cdot 8^k+9\cdot 10^k)x^k.$$
$$\therefore\quad a_k=\frac{7}{2}\cdot 8^{k-1}+\frac{9}{2}\cdot 10^{k-1}.$$

例3. 从 n 个元素 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中取 r 个进行允许重复的组合。假定允许重复的组合数用 $\bar{C}(n, r)$ 表示，其结果可能有以下两种情况。

(a) 不出现某特定元素设为 a_1，这样的组合数为 $\bar{C}(n-1, r)$，相当于排除 a_1 后从 $a_2, a_3, \cdots, a_n$ 中取 r 个作允许重复的组合。

(b) 至少出现一个 a_1，其组合数为 $\bar{C}(n, r-1)$，相当于从 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ 中取 $r-1$ 个作允许重复的组合，然后再加上一个 a_1 得从 n 个元素中取 r 个作允许重复的组合。

依据加法法则可得

$$\bar{C}(n, r)=\bar{C}(n, r-1)+\bar{C}(n-1, r),$$

因 $\bar{C}(n,1)=n$，$\bar{C}(n-1,1)=n-1$，故令 $\bar{C}(n,0)=1$。

递推关系(2-2-3)带有两个参数 n 和 r。

$$G_n(x)=\bar{C}(n,0)+\bar{C}(n,1)x+\bar{C}(n,2)x^2+\cdots,$$
$$-xG_n(x)=\qquad -\bar{C}(n,0)x-\bar{C}(n,1)x^2-\cdots,$$
$$+)-G_{n-1}(x)=-\bar{C}(n-1,0)-\bar{C}(n-1,1)x-\bar{C}(n-1,2)x^2-\cdots,$$
$$\overline{\qquad(1-x)G_n(x)-G_{n-1}(x)=0.\qquad}\tag{2-2-3}$$

(2-2-3)式是关于 $G_n(x)$ 的递推关系，但系数$(1-x)$不是常数。但

$$G_1(x)=\bar{C}(1,0)+\bar{C}(1,1)x+\bar{C}(1,2)x^2+\cdots$$
$$=1+x+x^2+\cdots=\frac{1}{1-x}.$$

$$\therefore\quad G_n(x)=\frac{1}{1-x}G_{n-1}(x)=\frac{1}{(1-x)^2}G_{n-2}(x)$$
$$=\cdots=\frac{1}{(1-x)^{n-1}}G_1(x)=\frac{1}{(1-x)^n}.$$

由二项式定理

$$(1-x)^{-n}=1+nx+\frac{n(n+1)}{2!}x^2+\frac{n(n+1)(n+2)}{3!}x^3+\cdots$$

可得

$$\bar{C}(n,r)=\frac{n(n+1)\cdots(n+r-1)}{r!}=\frac{(n+r-1)!}{(n-1)!r!}$$
$$=C(n+r-1,r).$$

§3 Fibonacci 数列

1. 递推关系

Fibonacci 数列是递推关系的又一典型问题，数列的本身有着许多应用。

问题：有雌雄一对兔子，假定过两个月便可繁殖雌雄各一的一对小兔。问过 n 个月后共有多少对兔子？

设满 n 个月时兔子对数为 F_n，其中当月新生兔数目设为 N_n 对。第 $n-1$ 个月留下的兔子数目设为 O_n 对。

$$F_n = N_n + O_n.$$

但 $$O_n = F_{n-1},\ N_n = O_{n-1} = F_{n-2}.$$

即第 $n-2$ 个月的所有兔子到第 n 个月都有繁殖能力了。

$$\therefore\quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2},\ F_1 = F_2 = 1. \tag{2-3-1}$$

由递推关系(2-3-1)式可依次得到

$$F_3 = F_1 + F_2 = 2,\ F_4 = F_2 + F_3 = 3,$$
$$F_5 = F_3 + F_4 = 3 + 2 = 5, \cdots.$$

2. 问题的解

设 $G(x) = F_1x + F_2x^2 + \cdots,$

$$\begin{aligned} x^3:&\ F_3 = F_2 + F_1,\\ x^4:&\ F_4 = F_3 + F_2,\\ +)&\ \cdots\cdots \end{aligned}$$

$$G(x) - x^2 - x = x(G(x) - x) + x^2G(x),$$
$$\therefore\quad (1 - x - x^2)G(x) = x.$$

$$\begin{aligned} G(x) &= \frac{x}{1 - x - x^2}\\ &= \frac{x}{\left(1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}x\right)\left(1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}x\right)}\\ &= \frac{A}{1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}x} + \frac{B}{1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}x}, \end{aligned}$$

$$\therefore\quad \begin{cases} A + B = 0\\ \frac{\sqrt{5}}{2}(A - B) = 1, \end{cases}\quad \begin{cases} A + B = 0\\ A - B = \frac{2}{\sqrt{5}}. \end{cases}$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{5}},\quad B = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

$$\therefore \quad G(x)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x}-\frac{1}{1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}x}\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}[(\alpha-\beta)x+(\alpha^2-\beta^2)x^2+\cdots]。$$

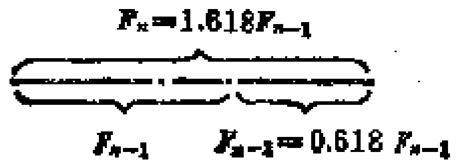
$$\therefore \quad F_n=(\alpha^n-\beta^n)/\sqrt{5}。$$

其中

$$\alpha=\frac{-2}{1-\sqrt{5}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \beta=\frac{-2}{1+\sqrt{5}}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}。$$

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n-\beta^n)\doteq\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n。 \qquad (2\text{-}3\text{-}2)$$

$$\frac{F_n}{F_{n-1}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1.618。$$



3. 若干等式

① $$F_1+F_2+\cdots+F_n=F_{n+2}-1。 \qquad (2\text{-}3\text{-}3)$$

证明：

$$\begin{aligned}
F_1&=F_3-F_2,\\
F_2&=F_4-F_3,\\
&\cdots\\
F_{n-1}&=F_{n+1}-F_n,\\
+)\quad F_n&=F_{n+2}-F_{n+1},
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad F_1+F_2+\cdots+F_n=F_{n+2}-F_2=F_{n+2}-1。$$

② $$F_1+F_3+F_5+\cdots+F_{2n-1}=F_{2n}.\tag{2-3-4}$$

证明：

$$\begin{aligned}
F_1&=F_2,\\
F_3&=F_4-F_2,\\
F_5&=F_6-F_4,\\
&\cdots\\
+)\quad F_{2n-1}&=F_{2n}-F_{2n-2},\\
\hline
\therefore\quad F_1+F_3+\cdots+F_{2n-1}&=F_{2n}.
\end{aligned}$$

③ $$F_1^2+F_2^2+\cdots+F_n^2=F_nF_{n+1}.\tag{2-3-5}$$

证明：

$$\begin{aligned}
&F_1^2=F_2F_1,\\
&F_2^2=F_2(F_3-F_1)=F_2F_3-F_2F_1,\\
&F_3^2=F_3(F_4-F_2)=F_3F_4-F_2F_3,\\
&\qquad\cdots\\
+)\ &F_n^2=F_n(F_{n+1}-F_{n-1})=F_nF_{n+1}-F_{n-1}F_n,\\
\hline
\therefore\ &F_1^2+F_2^2+\cdots+F_n^2=F_nF_{n+1}.
\end{aligned}$$

4. 在优选法上的应用

设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 上有一单峰极值点，假定为极大点。

所谓单峰极值，即只有一个极点 ξ，而且当 x 与 ξ 偏离越大，偏差 $|f(x)-f(\xi)|$ 也越大。

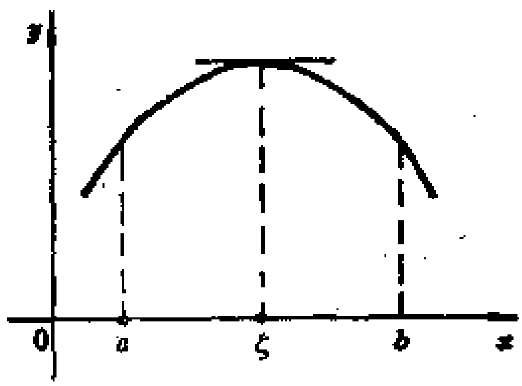


图 2-3-1

设函数 $f(x)$ 在 $x=\xi$ 点取得极大值。要求用若干次试验找到 ξ 点准确到一定的程度。最简单的办法，把 (a,b) 三等分，令

$$x_1 = a + \frac{1}{3}(b - a),\quad x_2 = a + \frac{2}{3}(b - a).$$

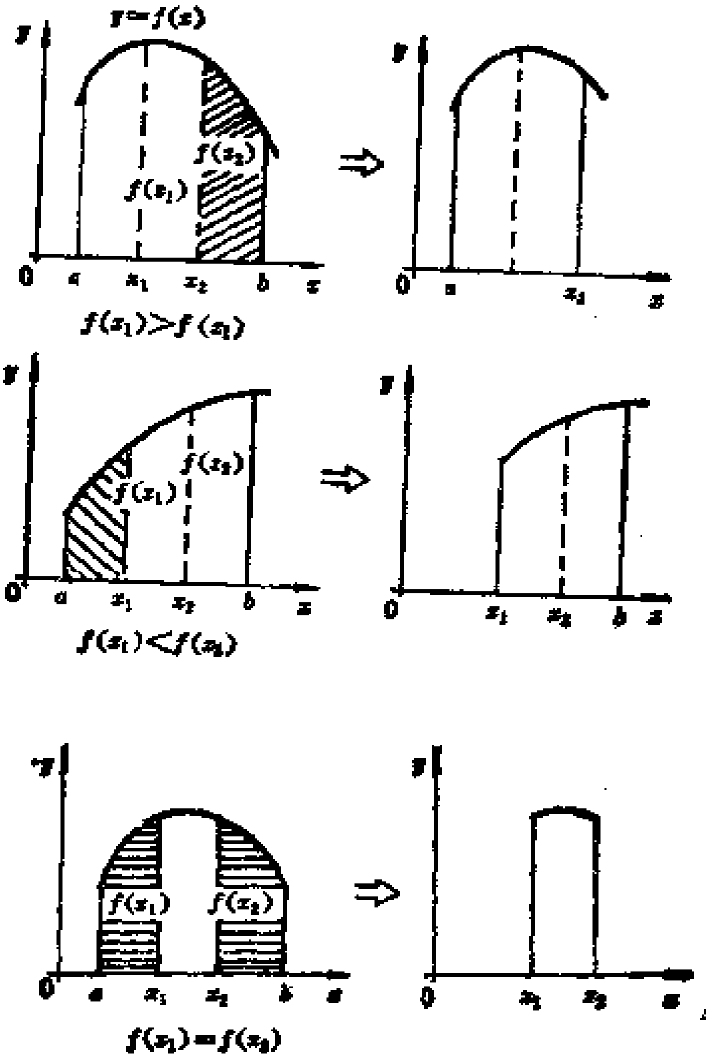


图 2-3-2

依据 $f(x_1)$，$f(x_2)$ 的大小分别讨论如下。

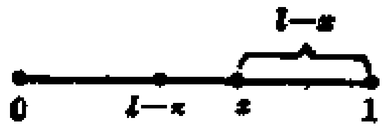
当 $f(x_1) > f(x_2)$，则极大点 ξ 必在 (a, x_2) 区间上，区间 (x_2, b) 可舍去。

当 $f(x_1) < f(x_2)$，则极大点 ξ 必在 (x_1, b) 区间上，(a, x_1) 舍去。

当 $f(x_1) = f(x_2)$，则极大点 ξ 必在 (x_1, x_2) 区间上，(a, x_1) 和 (x_2, b) 均可舍去。

图 2-3-2 中影线便是舍去部分。

可见作两次试验，至少可把区间缩至原来区间的 $\frac{2}{3}$。比如 $f(x_1)>f(x_2)$，进一步在 (a, x_2) 区间上找极值点。若继续用三等分法，将面对着一个事实，即其中 x_1 点的试验没发挥其作用。为此设想在 $(0,1)$ 区间的两个对称点 $x, 1-x$ 分别作试验。



设保留下 $(0,x)$ 区间，继续在 $(0,x)$ 区间的下面两个点

$$x^2,\ (1-x)x$$

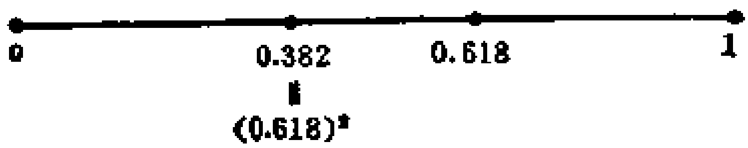
处作试验，若

$$x^2=1-x, \tag{2-3-6}$$

则前一次 $1-x$ 的点的试验，这一次可继续使用，可节省一次试验。由(2-3-6)式有

$$x^2+x-1=0.$$

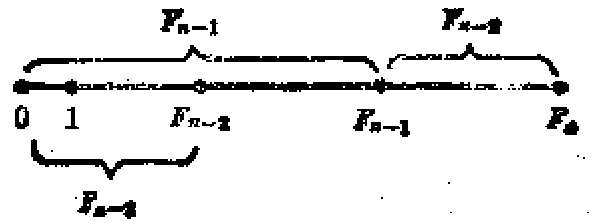
$$\therefore\quad x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}=0.618.$$



这就是所谓的 0.618 优选法。即若在(0，1)区间上找单峰极大值时，可在 $x_1=0.618$，$x_2=1-0.618=0.382$ 点作试验。比如保留区间 $(0, 0.618)$，由于 $(0.618)^2=0.382$，故只要在 $0.618\times0.382=0.236$ 点作一次试验。

优选法中可利用 Fibonacci 数列，和 0.618 法不同之点在于它预先确定试验次数，分两种情况介绍其方法。

(a) 所有可能试验数正好是某一个 F_n.



这时两个试验点放在 F_{n-1} 和 F_{n-2} 两个分点上，如若 F_{n-1} 分点较好，则舍去小于 F_{n-2} 的部分；如若 F_{n-2} 点更好，则舍去大于 F_{n-1} 的部分.在留下的部分共 F_{n-1} 个分点，其中第 F_{n-2} 和第 F_{n-3} 二试验点，恰好有一个是刚才留下来的试验可以利用.

可见在 F_n 个可能的试验中，最多用 $n-1$ 次试验便可得到所求的极值点.

(b) 利用 Fibonacci 数列进行优选不同于 0.618 法之点，还在于它适合于参数只能取整数值的情况. 如若可能试验的数目比 F_n 小，但比 F_{n-1} 大时，可以虚加几个点凑成 F_n 个点，但新增加的点的试验不必真做，可认定比其它点都差的点来处理.

下面给出两个定理作为这一节的结束.

定理: 测试 n 次可将包含单峰极值点的区间缩小到原区间的 $1/F_{n+1}+\varepsilon$，ε 是任意小的正实数，$n\geqslant 2$.

证: 对 n 用数学归纳法.

$n=2$ 时，将区间 (a, b) 平分成 $F_{2+1}=2$ 段. 在分点（包括端点 a, b）分别标上 0，1，2. 在 1 点的两侧各取 ε，在 $1+\varepsilon$ 与 $1-\varepsilon$ 两点上测试，无论哪一点较优，保留下来的区间长度均为 $1+\varepsilon$，命题成立.

假设对于 $n-1$，命题成立.

对于 n，将 (a, b) 平分成 F_{n+1} 段，对分点（包括端点 a, b）依次标上 $0, 1, \ldots, F_{n+1}$. 先在 F_{n-1} 点与 F_n 点测试，无论哪一点较优，保留下来的区间均为 F_n 段. 根据归纳假设，再做 $n-1$ 次测

试（内含前两次测试之一）可将含极值点的区间缩小到 $1+\varepsilon$ 段，即原区间 (a,b) 的 $1/F_{n+1}+\varepsilon$。

因 $F_n/F_{n+1}\to(\sqrt{5}-1)/2\approx 0.618$，当 n 较大时，可将相继的两个测试点取在待测区间的 0.618 及 $1-0.618$ 处。由

$$\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n<\frac{1}{F_{n+1}}<\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{n-1},\quad n\geqslant 2,$$

可知，0.618 法比 F_n 法最多多测试一次。0.618 法的优点是不必事先定测试次数。

定理： 设在给定区间内有单峰极值点。如果包含极值点在内的可测试点为 $F_{n+2}-1$ 个，则测试 n 次必可找到极值点，$n\geqslant 2$。

证： 对 n 用数学归纳法。

$n=2$ 时，$F_{2+2}-1=2$，命题成立。

假设对小于 n 的正整数命题成立。

下面证明对 n 命题成立。设可测试点的标号依次是 $1,2,\cdots,F_n,\cdots,F_{n+1},\cdots,F_{n+2}-1$。先在 F_n 点及 F_{n+1} 点测试。无论哪一点较优，保留下来的可测点都为 $F_{n+1}-1$ 个。根据归纳假设，再测试 $n-1$ 次必可找到极值点。而在保留的 $F_{n+1}-1$ 个可测试点中，有一个点（F_n 或 F_{n+1}）的测试结果下一次比较时正好用上，这样总测试次数为 n。■

§4 母函数的性质

一个序列和它的母函数一一对应。给了序列便得知它的母函数；反之，求得母函数序列也随之而定。这种关系颇像数学中的积分变换，特别酷似离散序列的 Z 变换。如 §2 的例子所示的那样，为了求满足某种递推关系的序列，可把它转换为求对应的母函数 $G(x)$，$G(x)$ 可能满足一代数方程，或代数方程组，甚至于是微分方程。最后求逆变换，即从已求得的母函数 $G(x)$ 得到序列 $\{a_n\}$。

关键在于要搭起从序列到母函数，和从母函数到序列这两座桥．这一节便是以此为目的．不特别说明下面假设 $\{a_k\}$、$\{b_k\}$ 两个序列对应的母函数分别为 $A(x)$，$B(x)$。

性质 1.

若 $b_k=\begin{cases}0, & k<l,\\ a_{k-l}, & k\geqslant l,\end{cases}$ 则 $B(x)=x^lA(x)$。

证：

$$B(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_{l-1}x^{l-1}+b_lx^l+b_{l+1}x^{l+1}+\cdots,$$

$$\therefore\quad B(x)=\underbrace{0+0+\cdots+0}_{l\text{ 个}}+b_lx^l+b_{l+1}x^{l+1}+\cdots$$

$$=a_0x^l+a_1x^{l+1}+\cdots$$

$$=x^lA(x).$$

例. 已知 $A(x)=\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\cdots=e^x-1$。

则

$$B(x)=\frac{x^m}{1!}+\frac{x^{m+1}}{2!}+\frac{x^{m+2}}{3!}+\cdots=x^{m-1}(e^x-1).$$

性质 2 若 $b_k=a_{k+l}$，则

$$B(x)=\left[A(x)-\sum_{k=0}^{l-1}a_kx^k\right]\Big/x^l.$$

证明： $B(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots,$

$$\therefore\quad B(x)=a_l+a_{l+1}x+a_{l+2}x^2+\cdots$$

$$=\frac{1}{x^l}(a_lx^l+a_{l+1}x^{l+1}+a_{l+2}x^{l+2}+\cdots)$$

$$=[A(x)-a_0-a_1x-a_2x^2-\cdots-a_{l-1}x^{l-1}]/x^l$$

$$=\left[A(x)-\sum_{k=0}^{l-1}a_kx^k\right]\Big/x^l.$$

例． $A(x)=\sin x=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots,$

$$B(x)=\frac{1}{7!}x+\frac{1}{9!}x^3+\cdots$$

$$=\left[\sin x-x-\frac{1}{3!}x^3-\frac{1}{5!}x^5\right]\Big/x^6.$$

性质 3. 若 $b_k=\sum_{i=0}^{k}a_i$，则 $B(x)=\frac{A(x)}{1-x}$.

证明：

$$1:\ b_0=a_0,$$
$$x:\ b_1=a_0+a_1,$$
$$x^2:\ b_2=a_0+a_1+a_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x^n:\ b_n=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n,$$
$$+)\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$B(x)=a_0/(1-x)+a_1x/(1-x)+a_2x^2/(1-x)+\cdots$$
$$=[a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots]/(1-x)=A(x)/(1-x).$$

例． 已知 $A(x)=1+x+x^2+\cdots x^n+\cdots=\frac{1}{1-x},$

$$B(x)=1+2x+3x^2+4x^3+\cdots=\frac{1}{(1-x)^2}.$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k=\frac{1}{(1-x)^2}.$$

类似可得

$$C(x)=(1+2x+3x^2+4x^3+\cdots)(1+x+x^2+x^3+\cdots)=1+3x+6x^2+10x^3+\cdots$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2}(k+1)(k+2)x^k=\frac{1}{(1-x)^3}.$$

性质 4. 若 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ 收敛，$b_k = \sum_{i=k}^{\infty} a_i$，则

$$B(x) = \frac{A(1) - xA(x)}{1-x}.$$

证明: 因 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ 收敛，所以 b_k 存在。

$$\begin{aligned}
1:&\ b_0 = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots = A(1)\\
x:&\ b_1 = \qquad a_1 + a_2 + \cdots = A(1) - a_0,\\
x^2:&\ b_2 = \qquad\qquad a_2 + \cdots = A(1) - a_0 - a_1,\\
+)&\ \cdots\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

$$B(x) = A(1)[1 + x + x^2 + \cdots] - a_0x(1 + x + x^2 + \cdots) - a_1x^2(1 + x + x^2 + \cdots) + \cdots,$$

$$\therefore \quad B(x) = \frac{A(1)}{1-x} - (a_0 + a_1x + \cdots)x/(1-x)$$

$$= \frac{A(1) - xA(x)}{1-x}.$$

性质 5. 若 $b_k = ka_k$，则 $B(x) = xA'(x)$。

例。 $$A(x) = 1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1-x}.$$

则 $$x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots = x\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

性质 6. 若 $b_k = \frac{a_k}{1+k}$，则 $B(x) = \frac{1}{x}\int_0^x A(x)dx$。

性质 5 和性质 6 的结论是显而易见的。

性质 7. 若

$$c_k = a_0b_k + a_1b_{k-1} + a_2b_{k-2} + \cdots + a_kb_0 = \sum_{i=0}^{k} a_ib_{k-i}.$$

则 $C(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots = A(x)B(x)$。

证：

$$
\begin{aligned}
1:&\ c_0 = a_0b_0,\\
x:&\ c_1 = a_0b_1 + a_1b_0,\\
x^2:&\ c_2 = a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0,\\
+)&\ \cdots\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C(x) &= a_0(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots)\\
&\quad + a_1x(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots)\\
&\quad + a_2x^2(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots) + \cdots\\
&= (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots)(b_0 + b_1x\\
&\quad + b_2x^2 + \cdots)
\end{aligned}
$$

$$\therefore\quad C(x) = A(x)B(x).$$

例. 已知 $A(x) = 1 + x + x^2 + \cdots = \dfrac{1}{1-x}$,

$$B(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots = \frac{x}{(1-x)^2},$$

$$C_k = 1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

则 $\quad C(x) = \dfrac{x}{(1-x)^3}.$

§5 线性常系数递推关系

在 §3 中讨论了满足递推关系

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

及初值

$$F_1 = F_2 = 1$$

的 *Fibonacci* 数列 $\{F_n\}$ 的母函解法. 下面讨论一般的线性常系数递推关系的母函数解法. 用 $\{a_n\}$ 表示序列 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$.

定义 如果序列$\{a_n\}$满足

$$a_n + C_1 a_{n-1} + C_2 a_{n-2} + \cdots + C_k a_{n-k} = 0, \quad (2-5-1)$$

$$a_0 = d_0, a_1 = d_1, \cdots, a_{k-1} = d_{k-1}, \quad (2-5-2)$$

$C_1, C_2, \cdots C_k$ 及 $d_0, d_1, \cdots d_{k-1}$ 是常数，$C_k \neq 0$，则 (2-5-1) 称为$\{a_n\}$的k阶常系数线性递推关系，(2-5-2)称为$\{a_n\}$的初始条件，

$$C(x) = x^k + C_1 x^{k-1} + \cdots + C_{k-1} x + C_k$$

称为$\{a_n\}$的特征多项式。

设 $G(x)$ 为$\{a_n\}$的母函数：

$$G(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots.$$

根据(2-5-1)，有

$$x^k(a_k + C_1 a_{k-1} + C_2 a_{k-2} + \cdots + C_k a_0) = 0,$$

$$x^{k+1}(a_{k+1} + C_1 a_k + C_2 a_{k-1} + \cdots + C_k a_1) = 0,$$

$$\cdots\cdots$$

$$x^n(a_n + C_1 a_{n-1} + C_2 a_{n-2} + \cdots + C_k a_{n-k}) = 0,$$

$$\cdots\cdots.$$

将这些式子两边分别相加，得到

$$G(x) - \sum_{i=0}^{k-1} a_i x^i + C_1 x\left(G(x) - \sum_{i=0}^{k-2} a_i x^i \right) + \cdots + C_k x^k G(x) = 0,$$

即

$$(1 + C_1 x + C_2 x^2 + \cdots + C_k x^k) G(x) = \sum_{j=0}^{k-1} C_j x^j \sum_{i=0}^{k-1-j} a_i x^i$$

其中 $C_0 = 1$.

令 $P(x) = \sum_{j=0}^{k-1} C_j x^j \sum_{i=0}^{k-1-j} a_i x^i$，多项式 $P(x)$ 的次数不大于$k-1$。

特征多项式

$$C(x) = x^k + C_1 x^{k-1} + \cdots + C_k,$$

因此，

$$x^kC\left(\frac{1}{x}\right)=1+C_1x+\cdots+C_kx^k$$

是 k 次多项式。我们知道 $C(x)=0$ 在复数域中有 k 个根。设

$$C(x)=(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\cdots(x-\alpha_t)^{k_t},$$

$$k_1+k_2+\cdots+k_t=k,$$

则

$$x^kC\left(\frac{1}{x}\right)=1+C_1x+\cdots+C_kx^k$$

$$=(1-\alpha_1x)^{k_1}(1-\alpha_2x)^{k_2}\cdots(1-\alpha_tx)^{k_t}.$$

于是

$$(1+C_1x+\cdots+C_kx^k)G(x)=P(x),$$

$$G(x)=\frac{P(x)}{(1+C_1x+\cdots+C_kx^k)}$$

$$=\frac{P(x)}{(1-\alpha_1x)^{k_1}(1-\alpha_2x)^{k_2}\cdots(1-\alpha_tx)^{k_t}}. \quad (2\text{-}5\text{-}3)$$

(2-5-3)式是有理式，且分子的次数低于分母的次数，有分项表示，即

$$G(x)=\frac{A_{11}}{1-\alpha_1x}+\frac{A_{12}}{(1-\alpha_1x)^2}+\cdots+\frac{A_{1k_1}}{(1-\alpha_1x)^{k_1}}$$

$$+\frac{A_{21}}{1-\alpha_2x}+\frac{A_{22}}{(1-\alpha_2x)^2}+\cdots+\frac{A_{2k_2}}{(1-\alpha_2x)^{k_2}}$$

$$+\cdots$$

$$+\frac{A_{t1}}{1-\alpha_tx}+\frac{A_{t2}}{(1-\alpha_tx)^2}+\cdots+\frac{A_{tk_t}}{(1-\alpha_tx)^{k_t}}$$

$$=\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{k_i}\frac{A_{ij}}{(1-\alpha_ix)^j} \quad (2\text{-}5\text{-}4)$$

x^n 的系数是 $a_n=\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{k_i}A_{ij}\binom{j+n-1}{n}\alpha_i^n$. A_{ij} 是常数.

定理：设 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 是有理分式，多项式 $P(x)$ 的次数低于 $Q(x)$ 的次数．则 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 有分项表示，且表示是唯一的。

证明：设 $Q(x)$ 的次数为 n，对 n 用数学归纳法。

$n=1$ 时，$P(x)$ 是常数，命题成立。

假设对小于 n 的正整数，命题成立。

下面证明对正整数 n 命题成立．设 α 是 $Q(x)$ 的 k 重根，

$$Q(x)=(x-\alpha)^k Q_1(x),\quad Q_1(\alpha)\neq 0.$$

不妨设 $P(x)$ 与 $Q(x)$ 互素，设

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{(x-\alpha)^k}+\frac{P_1(x)}{(x-\alpha)^{k-1}Q_1(x)} \tag{2-5-5}$$

$$AQ_1(x)+(x-\alpha)P_1(x)=P(x)$$

$$A=P(\alpha)/Q_1(\alpha)\neq 0, \tag{2-5-6}$$

$$P_1(x)=[P(x)-AQ_1(x)]/(x-\alpha). \tag{2-5-7}$$

$P_1(x)$ 的次数低于 $P(x)$．根据归纳假设，

$$\frac{P_1(x)}{(x-\alpha)^{k-1}Q_1(x)}$$

可分项表示．因此，

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

可分项表示．由(2-5-6)式及(2-5-7)式可知表示是唯一的． ■

以下分别各种情况讨论具体计算的问题。

(1) 特征多项式 $C(x)$ 无重根

设 $C(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_k)$．(2-5-4) 可简化为

$$G(x)=\frac{A_1}{1-\alpha_1 x}+\frac{A_2}{1-\alpha_2 x}+\cdots+\frac{A_k}{1-\alpha_k x}$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \frac{A_i}{1 - \alpha_i x} \tag{2-5-8}$$

x^n 的系数是

$$a_n = \sum_{i=1}^{k} A_i \alpha_i^n. \tag{2-5-9}$$

$A_1, A_2, \cdots, A_k$ 可由线性方程组

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + \cdots + A_k = d_0, \\ A_1\alpha_1 + A_2\alpha_2 + \cdots + A_k\alpha_k = d_1, \\ \cdots\cdots \\ A_1\alpha_1^{k-1} + A_2\alpha_2^{k-1} + \cdots + A_k\alpha_k^{k-1} = d_{k-1}, \end{cases} \tag{2-5-10}$$

解出。(2-5-10)的系数矩阵的行列式是 Vander mond 行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_k \\ \cdots\cdots \\ \alpha_1^{k-1} & \alpha_2^{k-1} & \cdots & \alpha_k^{k-1} \end{vmatrix} \tag{2-5-11}$$

$$= \prod_{i>j} (\alpha_i - \alpha_j) \neq 0.$$

不难看出(2-5-10)有唯一解。

(2) 特征多项式 $C(x)$ 有共轭复根

设 α_1, α_2 是 $C(x)$ 的一对共轭复根。

$$\alpha_1 = \rho(\cos\theta + i\sin\theta), \alpha_2 = \bar{\alpha}_1 = \rho(\cos\theta - i\sin\theta).$$

$\dfrac{A_1}{1-\alpha_1 x} + \dfrac{A_2}{1-\alpha_2 x}$ 中 x^n 的系数是

$$\begin{aligned} & A_1\alpha_1^n + A_2\alpha_2^n \\ = & A_1\rho^n(\cos\theta + i\sin\theta)^n + A_2\rho^n(\cos\theta - i\sin\theta)^n \\ = & A_1\rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) + A_2\rho^n(\cos n\theta - i\sin n\theta) \\ = & (A_1 + A_2)\rho^n\cos n\theta + i(A_1 - A_2)\rho^n\sin n\theta \\ = & A\rho^n\cos n\theta + B\rho^n\sin n\theta. \end{aligned}$$

其中

$$A = A_1 + A_2,\quad B = i(A_1 - A_2).$$

在具体计算时，可先求出各对共轭复根，再求待定系数 A, B，避免中间过程的复数运算。

(3) 特征多项式 $C(x)$ 有重根

设 α 是 $C(x)$ 的 k 重根，则(2-5-4)可简化为

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{A_j}{(1-\alpha x)^j}.$$

x^n 的系数 $a_n = \sum_{j=1}^{k} A_j \binom{j+n-1}{n} \alpha^n$. 其中

$$\binom{j+n-1}{n} = \binom{n+j-1}{j-1},$$

是 n 的 $j-1$ 次多项。因此，a_n 是 α^n 与 n 的 $k-1$ 次多项式的乘积。

为了简化计算下面引入一些记号，介绍几个命题。

设 x 是任意变量，n 是非负整数，令

$$\binom{x}{n} = \begin{cases} 1, & \text{当 } n = 0 \text{ 时}, \\ \dfrac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{n!}, & \text{当 } n \geqslant 1 \text{ 时}. \end{cases}$$

不难证明，多项式 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 可用 $\binom{x}{0}, \binom{x}{1}, \cdots, \binom{x}{n}$ 唯一线性表示。其中 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 是常数。

设 $\{a_n\}$ 是给定序列，令

$$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n,\quad \Delta^k a_n = \Delta(\Delta^{k-1} a_n).$$

$\Delta^k a_n$ 称为 a_n 的 k 阶差分。

不难证明，如果对任意的 n 有 $\Delta^r a_n = 0$，则有

$$\sum_{i=0}^{r} (-1)^i \binom{r}{i} a_{n+r-i} = 0,$$

因而序列 $\{a_n\}$ 的特征多项式为 $C(x)=(x-1)^r$。

不难证明，如果 Δa_n 是 n 的 r 次多项式，则 a_n 是 n 的 $r+1$ 次多项式。

以上几个命题作为习题，请读者自己证明。

总之：

(1) 若特征多项式 $C(x)$ 有 n 个不同零点 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$，则递推关系(2-5-1)的解

$$a_k=l_1\alpha_1^k+l_2\alpha_2^k+\cdots+l_n\alpha_n^k.$$

其中 $l_1,l_2,\cdots,l_n$ 是待定常数，由初始条件(2-5-2)来确定。

(2) 若特征多项式 $C(x)$ 有不同的复根，可依照(1)的办法处理。不过任意复数 $a+bi$ 可写成 $\rho e^{i\theta}$ 形式。设

$$\alpha_1=\rho e^{i\theta}=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$$

是 $C(x)$ 的一个零点，其共轭复数为

$$\alpha_2=\rho e^{-i\theta}=\rho(\cos\theta-i\sin\theta).$$

$$\begin{aligned}l_1\alpha_1^k+l_2\alpha_2^k&=l_1\rho^k(\cos k\theta+i\sin k\theta)\\&\quad+l_2\rho^k(\cos k\theta-i\sin k\theta)\\&=\rho^k(l_1+l_2)\cos k\theta+i\rho^k(l_1-l_2)\sin k\theta.\end{aligned}$$

l_1+l_2 和 $i(l_1-l_2)$ 仍然是待定常数。 即 $C(x)=0$ 有一对共轭复根 $\alpha_1=\rho e^{i\theta}$ 和 $\alpha_2=\rho e^{-i\theta}$ 时，递推关系(2-5-1)的解有对应的项

$$A\rho^k\cos k\theta+B\rho^k\sin k\theta.$$

其中 A,B 是待定常数。

(3) 若 $C(x)=0$ 出现 k 重根。 不妨设 α_1 是 k 的重根。 则递推关系(2-5-1)的解对应于 α_1 的项为

$$(A_0+A_1n+\cdots+A_{k-1}n^{k-1})\alpha_1^n.$$

其中 $A_0,A_1,\cdots,A_{k-1}$ 是 k 个待定常数。

例1. 求下列 n 阶行列式 d_n 的值。

$$d_n=\begin{vmatrix}2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & 2 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & & & \ddots & & \vdots\\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 2\end{vmatrix}$$

根据行列式性质

$$d_n-2d_{n-1}+d_{n-2}=0,\ d_1=2,\ d_2=3.$$

对应的特征方程为

$$m^2-2m+1=(m-1)^2=0,$$

$$m_1=m_2=1.$$

故 $m=1$ 是二重根。

$$\therefore\quad d_n=(A+Bn)(1)^n=A+Bn.$$

$n=1$ 时有 $d_1=A+B=2$,

$n=2$ 时有 $d_2=A+2B=3$.

$$\therefore\quad \begin{cases}A+B=2,\\ A+2B=3,\end{cases}\quad A=B=1.$$

即 $d_n=n+1$.

例2. 求 $S_n=\sum_{k=0}^{n}k$,

$$S_n=1+2+3+\cdots+\overline{n-1}+n,$$

$$S_{n-1}=1+2+3+\cdots+\overline{n-1},$$

$$\therefore\quad S_n-S_{n-1}=n.$$

同理 $\quad S_{n-1}-S_{n-2}=n-1$,

相减得 $\quad S_n-2S_{n-1}+S_{n-2}=1$.

同理 $\quad S_{n-1}-2S_{n-2}+S_{n-3}=1$,

$$\therefore\quad S_n-3S_{n-1}+3S_{n-2}-S_{n-3}=0,$$

$$S_0=0,\ S_1=1,\ S_2=3.$$

对应的特征方程为

$$m^3-3m^2+3m-1=(m-1)^3=0,$$

$m=1$ 是三重根。

$$\therefore\quad S_n=(A+Bn+Cn^2)(1)^n=A+Bn+Cn^2.$$

$$S_0=0,\quad \therefore A=0,$$

$$S_1=1,\ B+C=1,$$

$$S_2=3,\ 2B+4C=3,\quad \therefore\quad B=C=\frac{1}{2}.$$

即
$$S_n=\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}n^2=\frac{1}{2}n(n+1).$$

这就证明了公式

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1).$$

例3. 求 $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n}k^2$.

$$S_n=1+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2+n^2,$$

$$S_{n-1}=1+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2,$$

$$\therefore\quad S_n-S_{n-1}=n^2.$$

同理 $\quad S_{n-1}-S_{n-2}=(n-1)^2,$

相减得 $\quad S_n-2S_{n-1}+S_{n-2}=2n-1.$

同理 $\quad S_{n-1}-2S_{n-2}+S_{n-3}=2(n-1)-1,$

相减得 $\quad S_n-3S_{n-1}+3S_{n-2}-S_{n-3}=2.$

同理 $\quad S_{n-1}-3S_{n-2}+3S_{n-3}-S_{n-4}=2,$

$$\therefore\quad S_n-4S_{n-1}+6S_{n-2}-4S_{n-3}+S_{n-4}=0.$$

$$S_0=0,\ S_1=1,\ S_2=5,\ S_3=14.$$

对应的特征方程为

$$m^4-4m^3+6m^2-4m+1=0.$$

$$r^4-4r^3+6r^2-4r+1=(r-1)^4=0,$$

$r=1$ 是四重根。

$$\therefore\quad S_n=(A+Bn+Cn^2+Dn^3)1^n.$$

依据 $S_0=0$，$S_1=1$，$S_2=5$，$S_3=14$ 得关于 A、B、C、D 的联立方程组：

$$\begin{cases}A=0,\\ B+C+D=1,\\ 2B+4C+8D=5,\\ 3B+9C+27D=14.\end{cases}$$

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\2&4&8\\3&9&27\end{vmatrix}=12,$$

$$B=\frac{1}{12}\begin{vmatrix}1&1&1\\5&4&8\\14&9&27\end{vmatrix}=\frac{1}{6},$$

$$C=\frac{1}{12}\begin{vmatrix}1&1&1\\2&5&8\\3&14&27\end{vmatrix}=\frac{1}{2},\quad D=\frac{1}{3}.$$

$$\therefore\quad S_n=\frac{1}{6}n+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{3}n^3=\frac{1}{6}n(1+3n+2n^2)$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

已知 S_n 是 n 的 3 次式，故不妨令

$$S_n=A+Bn+\frac{1}{2!}Cn(n-1)+\frac{1}{3!}Dn(n-1)(n-2).$$

确定待定系数时，比较方便，无需解一联立方程组。

例如 $n=0$ 时，$S_0=A=0$；

$n=1$ 时，$S_1=A+B=1$，$\therefore B=1$；

$n=2$ 时，$S_2=2B+C=5$，$\therefore C=3$；

$n=3$ 时，$S_3=3B+3C+D=14$，$\therefore D=2$；

$$\therefore \quad S_n = n + \frac{3}{2}n(n-1) + \frac{1}{3}n(n-1)(n-2)$$

$$= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

例 4. 求 $S_n = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$.

解: $\Delta S_n = S_{n+1} - S_n = (n+1)^3$ 是 n 的 3 次多项式，因此 S_n 是满足递推关系:

$$S_n - 5S_{n-1} + 10S_{n-2} - 10S_{n-3} + 5S_{n-4} - S_{n-6} = 0$$

设 $S_n = A_1\binom{n}{1} + A_2\binom{n}{2} + A_3\binom{n}{3} + A_4\binom{n}{4}$.

$S_1 = 1 = A_1$.

$S_2 = 1^3 + 2^3 = 9 = 1\cdot\binom{2}{1} + A_2$, $A_2 = 7$.

$S_3 = 9 + 3^3 = 36 = 1\cdot 3 + 7\cdot\binom{3}{2} + A_3$, $A_3 = 12$.

$S_4 = 36 + 4^3 = 100 = 1\cdot 4 + 7\cdot 6 + 12\cdot 4 + A_4$,

$\quad A_4 = 6$.

$$\therefore \quad S_n = \binom{n}{1} + 7\binom{n}{2} + 12\binom{n}{3} + 6\binom{n}{4}.$$

以 $n = 5$ 对上面的结果验证一下.

$S_5 = 100 + 5^3 = 225$,

$\binom{5}{1} + 7\binom{5}{2} + 12\binom{5}{3} + 6\binom{5}{4}$

$= 5 + 70 + 120 + 30 = 225$.

例 5. 求 $G(x) = \dfrac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$ 中 x^n 的系数 a_n.

解: $\{a_n\}$ 的特征多项式是 $(x-1)^3(x+1)(x^2+x+1)$.

$x=1$ 是 3 重根；

$x=-1$ 是 1 重根；

$x^2+x+1=0$ 的根是 $\dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}=e^{\pm\frac{2}{3}\pi i}$，$\rho=1$，$\theta=\dfrac{2}{3}\pi$。

因此可设

$$a_n=A+Bn+C\binom{n}{2}+D(-1)^n$$
$$+E\cos n\frac{2}{3}\pi+F\sin n\frac{2}{3}\pi$$

通过做长除法，求得

$$G(x)=\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}=\frac{1}{1-x-x^2+x^4+x^5+x^6}$$
$$=1+x+2x^2+3x^3+4x^4+5x^5+7x^6$$
$$+8x^7+10x^8+\cdots$$

可知

$$a_0=1,a_1=1,a_2=2,a_3=3,\ a_4=4,\ a_5=5,$$
$$a_6=7,a_7=8,a_8=10,\cdots.$$

利用 a_0,a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 的值解得 A,B,C,D,E,F。故

$$a_n=\frac{42}{72}+\frac{7}{12}n+\frac{1}{6}\binom{n}{2}+\frac{1}{8}(-1)^n+\frac{2}{9}\cos n\frac{2}{3}\pi.$$

通过上式，计算得 $a_6=7$，$a_7=8$，$a_8=10$，与用长除法得到的结果相同。

§6 整数的拆分和 Ferrers 图象

1. 问题举例

所谓整数拆分即把整数分解成若干整数的和，相当于把 n 个

无区别的球放到 n 个无标志的合子，合子允许空着，也允许放多于一个球。整数拆分成若干整数的和，办法不一，不同拆分法的总数叫做拆分数。

例1. 若有 1 克、2 克、3 克、4 克的砝码各一枚，问能称出哪几种重量？有几种可能方案？

$$
\begin{aligned}
&(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)\\
&\quad=(1+x+x^2+x^3)(1+x^3+x^4+x^7)\\
&\quad=1+x+x^2+2x^3+2x^4+2x^5+2x^6\\
&\qquad+2x^7+x^8+x^9+x^{10}.
\end{aligned}
$$

从右端的母函数知可称出从 1 克到 10 克，系数便是方案数。例如右端有 $2x^5$ 项，即称出 5 克的方案有 2。

$$5=3+2=1+4.$$

同样，

$$6=1+2+3=4+2$$

$$10=1+2+3+4.$$

故称出 6 克的方案数有 2，称出 10 克的方案数是唯一的。

例2 求用 1 分、2 分、3 分的邮票贴出不同数值的方案数。

因邮票允许重复，故母函数为

$$
\begin{aligned}
G(x)&=(1+x+x^2+\cdots)(1+x^2+x^4+\cdots)\\
&\quad\times(1+x^3+x^6+\cdots)\\
&=\frac{1}{1-x}\frac{1}{1-x^2}\frac{1}{1-x^3}=\frac{1}{1-x-x^2+x^4+x^5-x^6}\\
&=1+x+2x^2+3x^3+4x^4+5x^5+7x^6+\cdots.
\end{aligned}
$$

以其中 x^4 为例，其系数为 4，即 4 拆分成 1，2，3 之和的拆分数为 4，即

$$4=1+1+1+1,\quad 4=1+1+2,\quad 4=2+2,\quad 4=1+3.$$

例3. 若有 1 克的砝码 3 枚，2 克的 4 枚，4 克的 2 枚。问能称出哪些重量？各有几种方案？

$$G(x)=(1+x+x^2+x^3)(1+x^2+x^4$$

$$+ x^6 + x^8)(1 + x^4 + x^8)$$

$$= (1 + x + 2x^2 + 2x^3 + 2x^4 + 2x^5 + 2x^6 + 2x^7 + 2x^8 + 2x^9 + x^{10} + x^{11})(1 + x^4 + x^8)$$

$$= 1 + x + 2x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 3x^5 + 4x^6 + 4x^7 + 5x^8 + 5x^9 + 5x^{10} + 5x^{11} + 4x^{12} + 4x^{13} + 3x^{14} + 3x^{15} + 2x^{16} + 2x^{17} + x^{18} + x^{19}.$$

例 4. 整数 n 拆分成 $1,2,3,\cdots,m$ 的和，并允许重复，求其母函数。如若其中 m 至少出现一次，其母函数如何？

若整数 n 拆分成 $1,2,3,\cdots,m$ 的和，并允许重复，则其母函数为

$$G_1(x) = (1 + x + x^2 + \cdots)(1 + x^2 + x^4 + \cdots)\cdots$$
$$\cdots(1 + x^m + x^{2m} + \cdots)$$
$$= \frac{1}{1-x}\,\frac{1}{1-x^2}\cdots\frac{1}{1-x^m}$$
$$= \frac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)}.$$

若拆分中 m 至少出现一次，其母函数为

$$G_2(x) = (1 + x + x^2 + \cdots)(1 + x^2 + x^4 + \cdots)$$
$$\cdots(x^m + x^{2m} + \cdots)$$
$$= \frac{x^m}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)}.$$

显然有

$$G_2(x) = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)} - \frac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^{m-1})}. \quad (2\text{-}6\text{-}1)$$

等式(2-6-1)的组合意义：即整数 n 拆分成 1 到 m 的和的拆分数，减去拆分成 1 到 $m-1$ 的和的拆分数，即为至少出现一个 m 的拆

分数。

例5. 设有1、2、4、8、16、32克砝码各一枚，试问能称出哪些重量？分别有几种方案？

$$G(x)=(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16})(1+x^{32})$$
$$=\frac{1-x^2}{1-x}\frac{1-x^4}{1-x^2}\frac{1-x^8}{1-x^4}\frac{1-x^{16}}{1-x^8}\frac{1-x^{32}}{1-x^{16}}\frac{1-x^{64}}{1-x^{32}}$$
$$=\frac{1-x^{64}}{1-x}=(1+x+x^2+\cdots+x^{63})=\sum_{k=0}^{63}x^k.$$

从母函数 $G(x)$ 可以得知，用这些砝码可以称出从1克到63克的重量，而且办法都是唯一的。

这问题可以推广到证明任一十进制数 n，可表为

$$n=\sum_{k\geqslant 0}a_k2^k,\quad 0\leqslant a_k\leqslant 1,\ k\geqslant 0.$$

而且是唯一的。

2. 拆分数估计式

定理： 设 p_n 为整数 n 的拆分数，则

$$p_n<e^{\sqrt{\frac{20n}{3}}}.$$

证： 令 $\quad G(x)=p_0+p_1x+p_2x^2+\cdots,$

一个整数 n 拆分成若干整数的和，在拆分中每个整数允许重复出现。故

$$G(x)=\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots}.$$

$$\therefore\quad \ln G(x)=-\ln(1-x)-\ln(1-x^2)-\ln(1-x^3)-\cdots,$$

$$\ln(1-x)=-x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3-\cdots,$$

$$\ln(1-x^2)=-x^2-\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{3}x^6-\cdots,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\therefore\quad \ln G(x)=\left(x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots\right)$$

$$+\left(x^2+\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{3}x^6+\cdots\right)$$

$$+\left(x^3+\frac{1}{2}x^6+\frac{1}{3}x^9+\cdots\right)+\cdots$$

$$=\frac{x}{1-x}+\frac{1}{2}\frac{x^2}{1-x^2}+\frac{1}{3}\frac{x^3}{1-x^3}+\cdots,$$

$$(2\text{-}6\text{-}2)$$

$$\frac{x^n}{1-x^n}=\frac{x}{1-x}\frac{x^{n-1}}{1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}},$$

由于 $1>x>x^2>x^3>\cdots>x^{n-1}$,

$$\therefore\quad 1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}>nx^{n-1}.$$

$$\therefore\quad \frac{x^n}{1-x^n}<\frac{1}{n}\frac{x}{1-x}. \tag{2-6-3}$$

把(2-6-3)式代入(2-6-2)式得

$$\ln G(x)<\frac{x}{1-x}+\frac{1}{2^2}\frac{x}{1-x}+\frac{1}{3^2}\frac{x}{1-x}+\cdots$$

$$=\frac{x}{1-x}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\right).$$

由于

$$\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n^2-\frac{1}{4}}=\frac{1}{n-\frac{1}{2}}-\frac{1}{n+\frac{1}{2}},$$

因而

$$\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots<\frac{1}{n-\frac{1}{2}},$$

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots<1+\frac{1}{2-\frac{1}{2}}=\frac{5}{3}.$$

$$\ln G(x)<\frac{5}{3}\cdot\frac{x}{1-x} \tag{2-6-4}$$

设 $x\in(0,1)$，有

$G(x)=p_0+p_1x+p_2x^2+\cdots+p_nx^n+\cdots>p_nx^n$，

$\ln G(x)>\ln p_n+n\ln x$，

$$\ln p_n<\ln G(x)+n\ln\frac{1}{x} \tag{2-6-5}$$

把(2-6-4)代入(2-6-5)得

$$\ln p_n<\frac{2x}{1-x}+n\ln\frac{1}{x} \tag{2-6-6}$$

曲线 $z=\ln y$ 是上凸，故曲线位于曲线 $z=\ln y$ 的切线下方，(1，0)点的切线为

$$z=y-1,$$

故有

$$\ln y\leqslant y-1.$$

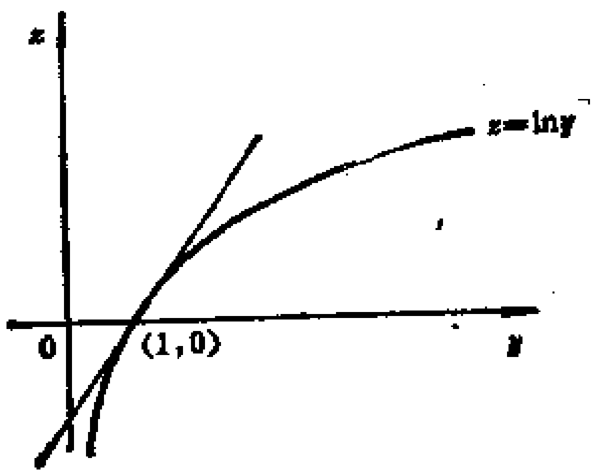


图 2-6-1

$$\ln \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{x} - 1.$$

以之代入(2-6-5)式得

$$\ln p_n < \frac{5x}{3(1-x)} + n\left(\frac{1}{x} - 1\right) = \frac{5x}{3(1-x)} + \frac{n(1-x)}{x} \tag{2-6-7}$$

不等式(2-6-7)的左端 $\ln p_n$ 是常数，右端是 x 的函数，即不等式对于 $x \in (0, 1)$ 成立。右端函数取极小时将给出较好的上界估计。令

$$y = \frac{5x}{3(1-x)} + \frac{n(1-x)}{x},$$

求导得

$$y' = \frac{5}{3(1-x)^2} - \frac{n}{x^2}.$$

令 $y' = 0$，得

$$(3n-5)x^2 - 6nx + 3n = 0.$$

解方程，得

$$x = \frac{3n \pm \sqrt{15n}}{3n-5},$$

$$x_1 = \frac{3n + \sqrt{15n}}{3n-5} > 1, \quad x_2 = \frac{\sqrt{3n}}{\sqrt{3n} + \sqrt{5}} \in (0,1)$$

因为

$$y'' = -\frac{10}{3}\frac{1}{(x-1)^3} + \frac{2n}{x^3}, \quad y''|_{x_2} > 0,$$

所以 x_2 是极小值点。以 x_2 的值代入 y，得

$$y = \sqrt{\frac{20}{3}n}.$$

$$\therefore \quad p_n < e^{\sqrt{\frac{20}{3}n}} \tag{2-6-8}$$

利用 $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots=\pi^2/6$，上式可改进为

$$p_n < e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\pi\sqrt{n}}.$$

3. Ferrers 图象

一个从上而下的 n 层格子，m_i 为第 i 层的格子数．当 $m_i \geqslant m_{i+1}$，$(i=1,2,\cdots,n-1)$，即上层的格子数不少于下层的格子数时，称之为 Ferrers 图象，如图 2-6-2 所示。

Ferrers 图象具有如下性质：

(*a*) 每一层至少有一个格子．

(*b*) 第一行与第一列互换，第二行与第二列互换，…，即图 2-6-3 绕虚线轴旋转 180° 所得的图仍然是 Ferrers 图象．这两个 Ferrers 图象称为是一对共轭的 Ferrers 图象．

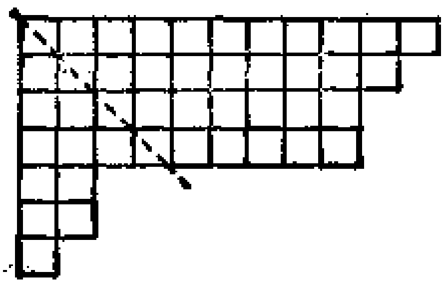


图 2-6-2

利用 Ferrers 图象可得关于整数拆分的十分有趣的结果．

(*a*) 整数 n 拆分成最大数为 k 的拆分数，和数 n 拆分成 k 个数的和的拆分数相等．

因整数 n 拆分成 k 个数的和的拆分可用一 k 行的 Ferrers 图象表示． 所得的 Ferrers 图象的共轭图象最上面一行有 k 个格．例如

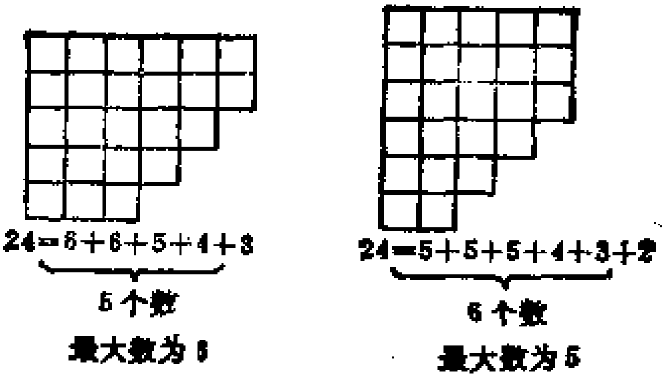


图 2-6-3

(*b*) 整数 n 拆分成最多不超过 m 个数的和的拆分数，和 n 拆分成最大的数不超过 m 的拆分数相等。

理由和(*a*)相类似。

因此，拆分成最多不超过 m 个数的和的拆分数的母函数是

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)}.$$

拆分成最多不超过 $m-1$ 个数的和的拆分数的母函数为

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^{m-1})}.$$

所以正好拆分成 m 个数的和的拆分数的母函数为

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)}-\frac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^{m-1})}$$

$$=\frac{x^m}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)}.$$

(*c*) 整数 n 拆分成互不相同的若干奇数的和的拆分数，和 n 拆分成有自共轭的 Ferrers 图象的拆分数相等。

设 $n=(2n_1+1)+(2n_2+1)+\cdots+(2n_k+1)$，其中

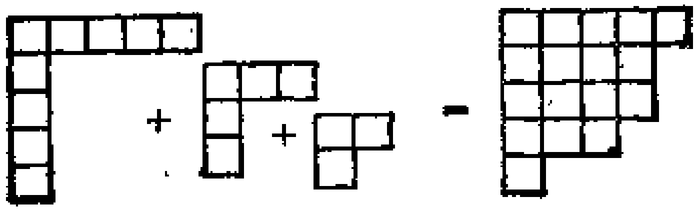
$$n_1>n_2>\cdots>n_k.$$

构造一 Ferrers 图象，其第一行，第一列都是 n_1+1 格，对应于 $2n_1+1$，第二行，第二列各 n_2+1 格，对应于 $2n_2+1$，依此类

推．由此所得的 Ferrers 图象是自共轭的．反过来也一样．例如

$$17=9+5+3$$

对应的 Ferrers 图象为



$9+5+3=17$

图 2-6-4

§7 指数型母函数

1. 问题提出

设有 n 个元素，其中元素 a_1 重复了 n_1 次，元素 a_2 重复了 n_2 次，$\cdots$，a_k 重复了 n_k 次，$n=n_1+n_2+\cdots+n_k$．从中取 r 个排列，求不同的排列数．

如果 $n_1=n_2=\cdots=n_k=1$，则是一般的排列问题．

现在由于出现重复，故不同的排列计数便比较复杂．先考虑 n 个元素的全排列，若 n 个元素没有完全一样的元素，则应有 $n!$ 种排列．若考虑到 n_i 个元素 a_i 的全排列数为 $n_i!$，则真正不同的排列数为

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}.$$

2. 解的分析

先讨论一个具体问题：若有 8 个元素，其中设 a_1 重复 3 次，a_2 重复 2 次，a_3 重复 3 次．从中取 r 个组合，其组合数设为 c_r，则

序列 $c_0,c_1,c_2,\cdots,c_8$ 的母函数为

$$
\begin{aligned}
G(x) &= (1+x+x^2+x^3)(1+x+x^2)(1+x+x^2+x^3) \\
&= (1+2x+3x^2+3x^3+2x^4+x^5)(1+x+x+x^3) \\
&= 1+3x+6x^2+9x^3+10x^4+9x^5+6x^6+3x^7+x^8.
\end{aligned}
\tag{2-7-1}
$$

从 x^4 的系数可知，这 8 个元素中取 4 个组合，其组合数为 10. 这 10 个组合可从下面展开式中得到

$$
\begin{aligned}
&(1+x_1+x_1^2+x_1^3)(1+x_2+x_2^2)(1+x_3+x_3^2+x_3^3) \\
&= [1+(x_1+x_2)+(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)+(x_1^3+x_1^2x_2+x_1x_2^2) \\
&\quad +(x_1^3x_2+x_1^2x_2^2)+x_1^3x_2^2](1+x_3+x_3^2+x_3^3) \\
&= 1+(x_1+x_2+x_3)+(x_1^2+x_1x_2+x_2^2+x_1x_3+x_2x_3 \\
&\quad +x_3^2)+(x_1^3+x_1^2x_2+x_1x_2^2+x_1^2x_3+x_1x_2x_3+x_2^2x_3 \\
&\quad +x_1x_3^2+x_2x_3^2+x_3^3)+(x_1x_3^3+x_2x_3^3+x_1^2x_3^2+x_1x_2x_3^2 \\
&\quad +x_2^2x_3^2+x_1^3x_3+x_1^2x_2x_3+x_1x_2^2x_3+x_1^3x_2+x_1^2x_2^2)+\cdots
\end{aligned}
$$

其中 4 次方项有

$$
\begin{aligned}
&x_1x_3^3+x_2x_3^3+x_1^2x_3^2+x_1x_2x_3^2+x_2^2x_3^2+x_1^3x_3 \\
&\quad +x_1^2x_2x_3+x_1x_2^2x_3+x_1^3x_2+x_1^2x_2^2.
\end{aligned}
\tag{2-7-2}
$$

(2-7-2)表达了从 8 个元素（a_1、a_3 各 3 个，a_2 2 个）中取 4 个的组合。例如 $x_1x_3^3$ 为一个 a_1，3 个 a_3 的组合，$x_1^2x_3^2$ 为两个 a_1，两个 a_3 的组合，余此类推.

若研究从中取 4 个排列的不同排列总数，以 $x_1^2x_3^2$ 对应的两个 a_1 两个 a_3 的不同排列为例，其不同排列数为

$$\frac{4!}{2!2!}=6,$$

即

$a_1a_1a_3a_3$，$a_3a_3a_1a_1$，$a_1a_3a_1a_3$，$a_3a_1a_3a_1$，$a_1a_3a_3a_1$，$a_3a_1a_1a_3$ 六种。同样，1 个 a_1 3 个 a_3 的不同排列数为 $\frac{4!}{3!}=4$. 即 $a_1a_3a_3a_3$，$a_3a_1a_3a_3$，

$a_3a_3a_1a_3$，$a_3a_3a_3a_1$，余此类推。故从(2-7-2)式可得问题的解，其不同的排列数为

$$4!\left(\frac{1}{1!3!}+\frac{1}{1!3!}+\frac{1}{2!2!}+\frac{1}{1!1!2!}+\frac{1}{2!2!}+\frac{1}{3!1!}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2!1!1!}+\frac{1}{1!2!1!}+\frac{1}{3!1!}+\frac{1}{2!2!}\right)$$
$$=4!\left(\frac{4}{3!}+\frac{3}{2!2!}+\frac{3}{2!}\right)$$
$$=4!\,\frac{4\cdot 2!2!+3\cdot 3!+3\cdot 2!\cdot 3!}{2!2!3!}$$
$$=16+18+36=70.$$

3. 指数型母函数

为了便于计算，利用上述特点，形式地引进函数

$$G_e(x)=\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\right)\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}\right)$$
$$\times\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\right)$$
$$=\left(1+2x+2x^2+\frac{7}{6}x^3+\frac{5}{12}x^4+\frac{1}{12}x^5\right)$$
$$\times\left(1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3\right)$$
$$=1+3x+\frac{9}{2}x^2+\frac{14}{3}x^3+\frac{35}{12}x^4+\frac{17}{12}x^5$$
$$+\frac{35}{72}x^6+\frac{8}{72}x^7+\frac{1}{72}x^8. \qquad (2\text{-}7\text{-}3)$$

从(2-7-3)式计算结果可以得出：取一个的排列数为3，取两个的排列数 为 $2\times\frac{9}{2}=9$，取3个的排列数为 $3!\,\frac{14}{3}=28$，取4

个的排列数为 $4!\frac{35}{12}=70$，如此等等。把(2-7-3)式改写成下面形式便一目了然了。

$$G_e(x)=1+\frac{3}{1!}x+\frac{9}{2!}x^2+\frac{28}{3!}x^3+\frac{70}{4!}x^4+170\frac{x^5}{5!}$$
$$+350\frac{x^6}{6!}+560\frac{x^7}{7!}+560\frac{x^8}{8!} \qquad (2\text{-}7\text{-}4)$$

定义： 对于序列 $a_0,a_1,a_2,\cdots$，函数

$$G_e(x)=a_0+\frac{a_1}{1!}x+\frac{a_2}{2!}x^2+\frac{a_3}{3!}x^3+\cdots+\frac{a_k}{k!}x^k+\cdots$$

称为是序列 $a_0,a_1,a_2,\cdots$ 的指数型母函数。

综上述可得如下两个结论：

(a) 若元素 a_1 有 n_1 个，元素 a_2 有 n_2 个，……，元素 a_k 有 n_k 个，由此组成的 $n(=n_1+n_2+\cdots+n_k)$ 个元素的排列，不同的排列总数为

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}.$$

(b) 若元素 a_1 有 n_1 个，元素 a_2 有 n_2 个，…，元素 a_k 有 n_k 个。由此组成的 $n(=n_1+n_2+\cdots+n_k)$ 个元素中取 r 个排列，设其不同的排列数为 p_r。则序列 $p_0,p_1,\cdots,p_n$ 的指数型母函数为

$$G_e(x)=\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{n_1}}{n_1!}\right)$$
$$\times\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{n_2}}{n_2!}\right)$$
$$\cdots\cdots\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{n_k}}{n_k!}\right).$$

与(2)中所用的方法相比，可以看到指数型母函数在解决有重复元素的排列时的优越性。

4. 举例：

例 1. 求由两个 a，1 个 b，2 个 c 组成的不同排列总数。

根据结论一，不同的排列总数

$$n=\frac{5!}{2!2!1!}=30.$$

例 2. 由 1,2,3,4 四个数字组成的五位数中，要求数 1 出现次数不超过 2 次，但不能不出现；2 出现不超出 1 次；3 出现次数可达 3 次，也可以不出现；4 出现次数为偶数。求满足上述条件的数的个数。

设满足上述条件的 r 位数的个数为 a_r，序列 $a_1,a_2,\cdots,a_{10}$ 的指数型母函数为

$$\begin{aligned}G_e(x)&=\left(\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}\right)(1+x)\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\right)\\&\quad\times\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}\right)\\&=\left(x+\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3\right)\left(1+x+x^2+\frac{2}{3}x^3\right.\\&\quad\left.+\frac{7}{24}x^4+\frac{1}{8}x^5+\frac{x^6}{48}+\frac{x^7}{144}\right)\\&=x+\frac{5}{2}x^2+3x^3+\frac{8}{3}x^4+\frac{43}{24}x^5+\frac{43}{48}x^6\\&\quad+\frac{17}{48}x^7+\frac{1}{288}x^8+\frac{1}{48}x^9+\frac{1}{288}x^{10}\\&=\frac{x}{1!}+5\frac{x^2}{2!}+18\frac{x^3}{3!}+64\frac{x^4}{4!}+215\frac{x^5}{5!}+645\frac{x^6}{6!}\\&\quad+1785\frac{x^7}{7!}+140\frac{x^8}{8!}+7650\frac{x^9}{9!}+12600\frac{x^{10}}{10!}.\end{aligned}$$

由此可见满足条件的5位数共215个。

例3. 求1,3,5,7,9五个数字组成的n位数的个数，要求其中3,7出现的次数为偶数，其它1,5,9出现次数不加限制。

设满足条件的r位数的个数为a_r，则序列$a_1, a_2, a_3, \cdots$对应的指数型母函数为

$$G_e(x)=\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)^2\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)^3.$$

由于
$$e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots,$$

$$\therefore\quad 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x}).$$

$$\begin{aligned}G_e(x)&=\frac{1}{4}(e^x+e^{-x})^2e^{3x}\\&=\frac{1}{4}(e^{2x}+2+e^{-2x})e^{3x}\\&=\frac{1}{4}(e^{5x}+2e^{3x}+e^x)\\&=\frac{1}{4}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5^n}{n!}x^n+2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^nx^n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right)\\&=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(5^n+2\cdot3^n+1)\frac{x^n}{n!}.\end{aligned}$$

$$\therefore\quad a_n=\frac{1}{4}(5^n+2\cdot3^n+1).$$

§8 母函数和递推关系应用举例

例1. 下图是一逻辑回路，符号D是一延迟装置，即在时间t输入一个信号给延迟装置D，在$t+1$时刻D将输出同样的信

号。符号⊕表加法装置。

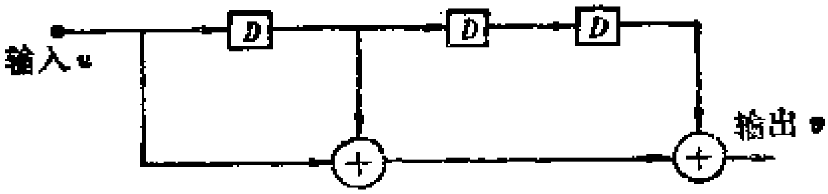


图 2-8-1

若在 $t=0,1,2,\cdots$时刻，输入信号 $u_0,u_1,u_2,\cdots$，求相同时刻的输出信号 $v_0,v_1,v_2,\cdots$。

显然，$v_0=u_0$，$v_1=u_0+u_1$，$v_2=u_2+u_1$，

$$v_3=u_3+u_2+u_0,\cdots.$$

一般地有 $\qquad v_n=u_n+u_{n-1}+u_{n-3}$，$n\geqslant 3$。

若输入信号的序列 $u_0,u_1,u_2,\cdots$ 的母函数为 $U(x)$，输出的信号序列 $v_0,v_1,v_2,\cdots$ 的母函数为 $V(x)$，则

$$V(x)=(1+x+x^3)U(x)=P(x)U(x).$$

其中

$$P(x)=1+x+x^3$$

被装置(图 2-8-1)的特性所确定，可以看作是该装置的传递函数，如图 2-8-2。



图 2-8-2

例 2. 有红球两只，白球、黄球各一只，试求有多少种不同的组合方案。

设 r,w,y 分别代表红球，白球，黄球。

$$(1+r+r^2)(1+w)(1+y)=(1+r+r^2)(1+y+w+yw)$$

$$=1+(r+y+w)+(r^2+ry+rw+yw)$$

$$+(r^2y+r^2w+ryw)+r^2yw.$$

从此可见，除一个球也不取的情况外，有：

(a) 取一个球的组合数为三，即分别取红，白，黄三种。

(b) 取二个球的组合数为四，即两个红的，一红一黄，一红一白，一黄一白。

(c) 取三个球的组合数为三，即两红一黄，二红一白，一红一黄一白。

(d) 取四个球的组合数为一，即二红一黄一白。

令取 r 球的组合数为 c_r，则序列 c_0，c_1，c_2，c_3，c_4 的母函数为

$$G(x)=(1+x+x^2)(1+x)^2=1+3x+4x^2+3x^3+x^4.$$

共有 1+3+4+3+1=12 种组合方式。

例 3. n 个完全一样的球放到 m 个有标志的盒子中，不允许有空盒，问共有多少种不同的方案？其中 $n \geqslant m$。

由于不允许空盒，令 n 个球放到 m 个有标志的盒子的方案数为 a_n，序列 $\{a_n\}$ 对应的母函数为 $G(x)$。则

$$G(x)=\underbrace{(x+x^2+\cdots)(x+x^2+\cdots)\cdots(x+x^2+\cdots)}_{m\text{项}}$$

$$=\frac{x^m}{(1-x)^m}.$$

因

$$(1-x)^{-m}=1+mx+\frac{m(m+1)}{2!}x^2+\frac{m(m+1)(m+2)}{3!}x^3+\cdots,$$

故二项式 $(1-x)^{-m}$ 中 x^{n-m} 项系数为

$$\frac{m(m+1)\cdots(m+\overline{n-m}-1)}{(n-m)!}=\frac{m(m+1)\cdots(n-1)}{(n-m)!}$$

即 $$C(m+(n-m)-1,n-m)=C(n-1,n-m)$$
$$=C(n-1,m-1).$$

例 4. 某单位有 8 个男同志，5 个女同志，现要组织一个由数目为偶数的男同志，和数目不少于 2 的女同志组成的小组，试求有多少种组成方式。

令 a_n 为从 8 位男同志中抽出 n 个的允许组合数。由于要男的数目必需是偶数，故 $a_1=a_3=a_5=a_7=0$，$a_0=1$，$a_2=C(8,2)=28$，$a_4=C(8,4)=70$，$a_6=C(8,6)=28$，$a_8=1$。
故数列 $a_0,a_1,a_2,\cdots,a_8$ 对应一母函数

$$A(x)=1+28x^2+70x^4+28x^6+x^8.$$

类似的办法可得女同志的允许组合数对应的母函数为

$$B(x)=10x^2+10x^3+5x^4+x^5.$$

$$\begin{aligned}C(x)=A(x)B(x)&=(1+28x^2+70x^4+28x^6\\&\quad+x^8)(10x^2+10x^3+5x^4+x^5)\\&=10x^2+10x^3+285x^4+281x^5+840x^6+728x^7\\&\quad+630x^8+350x^9+150x^{10}+38x^{11}+5x^{12}+x^{13}.\end{aligned}$$

$C(x)$ 中 x^k 项的系数 c_k 为符合要求的 k 个人组成的小组的数目，总的组成方式数目为

$$10+10+285+281+840+728+630+350+150+38+5+1$$
$$=3328.$$

例 5. 10 个数字(0 到 9)和 4 个四则运算符(+，−，×，÷)组成的 14 个元素。求由其中的 n 个元素的排列构成一算术表达式的个数。

因所求的 n 个元素的排列是算术表达式，故从左向右的最后一个符号必然是数字。而第 $n-1$ 位有两种可能，一是数字，一是运算符。如若第 $n-1$ 位是十个数字之一，则前 $n-1$ 位必然已构成一算术表达式。如若不然，即第 $n-1$ 位是 4 个运算符之一，则前 $n-2$ 位必然是算术表达式。根据以上分析，令 a_n 表 n 个元

素排列成算术表达式的个数。则

$$a_n = 10a_{n-1} + 40a_{n-2}, \qquad (2\text{-}8\text{-}1)$$

$$a_1 = 10,\ a_2 = 120.$$

$a_2 = 120$ 指的是从 0 到 99 的 100 个数，以及 ± 0, ± 1, $\cdots$, ± 9. 利用递推关系(2-8-1)，得 $a_0 = \frac{1}{2}$.

特征多项式为 $x^2 - 10x - 40$. 它的根是

$$x = 5 \pm \sqrt{65}.$$

$$a_n = A(5 + \sqrt{65})^n + B(5 - \sqrt{65})^n,$$

解方程

$$\begin{cases} A + B = \frac{1}{2}, \\ (5 + \sqrt{65})A + (5 - \sqrt{65})B = 10, \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} A = (15 + \sqrt{65})/4\sqrt{65}, \\ B = -(15 - \sqrt{65})/4\sqrt{65}. \end{cases}$$

$$\therefore \quad a_n = \frac{1}{4\sqrt{65}}[(15 + \sqrt{65})(5 + \sqrt{65})^n$$

$$- (15 - \sqrt{65})(5 - \sqrt{65})^n].$$

例 6. 设有 n 条封闭的曲线，两两相交于两点，任意三条封闭曲线不相交于一点. 求这样的 n 条曲线把平面分割成几个部分?

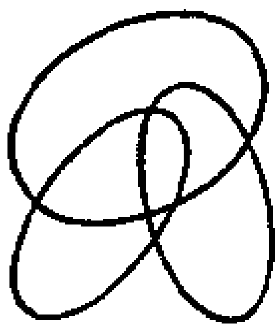


图 2-8-3

设满足条件的 n 条封闭曲线所分割成的域的数目为 a_n，其中 $n-1$ 条封闭曲线所分割成的域的数目为 a_{n-1}. 第 n 条封闭曲线和这些曲线相交于 $2(n-1)$ 个点，这 $2(n-1)$

个点把第 n 条封闭曲线截成 $2(n-1)$ 条弧，每条弧把 $2(n-1)$ 个域中的每个域一分为二。故新增加的域数为 $2(n-1)$。

$$a_n = a_{n-1} + 2(n-1),\ a_1 = 2. \qquad (2\text{-}8\text{-}2)$$

利用递推关系(2-8-2)得 $a_0 = 2$.

设

$$a_n = A_0 + A_1 n + A_2 \binom{n}{2},$$

$$a_0 = 2 = A_0,$$

$$a_1 = 2 = 2 + A_1,\ A_1 = 0,$$

$$a_2 = 4 = 2 + A_2, A_2 = 2,$$

$$\therefore a_n = 2 + 2\binom{n}{2}.$$

另解：利用欧拉公式

点数+域数−边数=2

点数 $= 2\binom{n}{2}$,

边数 $=2\times$点数

域数 $= 4\binom{n}{2} - 2\binom{n}{2} + 2 = 2 + 2\binom{n}{2}$.

例 7. 平面上有一点 P，它是 n 个域 $D_1, D_2, \cdots, D_n$ 的共同交界点，见图 2-8-4 现取 k 种颜色对这 n 个域进行着色，要求相邻两个域着的颜色不同。试求着色的方案数。

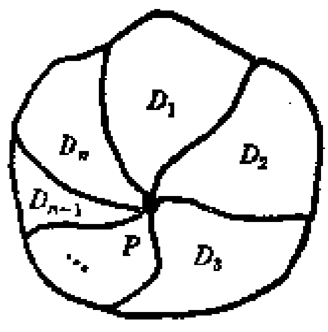


图 2-8-4

令 a_n 表示这 n 个域的着色方案数.无非有两种情况：(1) D_1 和 D_{n-1} 有相同的颜色;(2) D_1 和 D_{n-1} 所着颜色不同.第一种情形，D_n 域有 $k-1$ 种颜色可用,即 D_1, D_{n-1} 域所用颜色除外;而

且从 D_1 到 D_{n-2} 的着色方案，和 $n-2$ 个域的着色方案一一对应。后一种 D_n 域有 $k-2$ 种颜色可供使用；而且从 D_1 到 D_{n-1}的每一个着色方案和 $n-1$ 个域的着色方案一一对应。

$$\therefore \quad a_n = (k-2)a_{n-1} + (k-1)a_{n-2}, \tag{2-8-3}$$

$$a_2 = k(k-1), \quad a_3 = k(k-1)(k-2).$$

利用(2-8-3)式得 $a_1 = 0$，$a_0 = k$。

(2-8-3)式的特征方程为

$$x^2 - (k-2)x - (k-1) = 0,$$

$$x_1 = k-1, \quad x_2 = -1.$$

$$a_n = A(k-1)^n + B(-1)^n.$$

解方程

$$\begin{cases} A + B = k, \\ (k-1)A - B = 0. \end{cases} \tag{2-8-4}$$

得

$$\begin{cases} A = 1, \\ B = k-1. \end{cases}$$

$$\therefore \quad a_n = (k-1)^n + (k-1)(-1)^n, \quad n \geq 2.$$

$$a_1 = k.$$

例 8. 求下列行列式

$$d_n = \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}}_{n\text{ 列}} \left.\vphantom{\begin{vmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{vmatrix}}\right\} n\text{ 行}$$

利用行列式展开法，沿第一行展开得

$$d_n = d_{n-1} - d_{n-2}, \quad d_1 = 1, \quad d_2 = 0. \tag{2-8-5}$$

利用(2-8-5)式得 $d_0 = 1$，

特征方程是 $x^2-x+1=0$

解方程，得

$$x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}=e^{\pm\frac{\pi}{3}i}.$$

设

$$d_n=A\cos n\frac{\pi}{3}+B\sin n\frac{\pi}{3},$$

解方程

$$\begin{cases}A\cos\left(0\cdot\frac{\pi}{3}\right)+B\sin\left(0\cdot\frac{\pi}{3}\right)=1\\ A\left(\frac{1}{2}\right)+B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=1\end{cases}$$

得

$$\begin{cases}A=1\\ B=\frac{1}{\sqrt{3}}\end{cases}$$

$$\therefore\quad d_n=\cos n\cdot\frac{\pi}{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin n\cdot\frac{\pi}{3},\quad n\geqslant 1.$$

例 9. 求 n 位 2 进制数最后三位出现 010 图象的数的个数。

对于 n 位 2 进制数 $b_1b_2\cdots b_n$ 从左而右进行扫描，一当出现 010 图象，便从这图象后面一位从头开始扫描，例如对 11 位 2 进制数 00101001010 从左而右的扫描结果应该是 2～4，7～9 位出现 010 图象，即

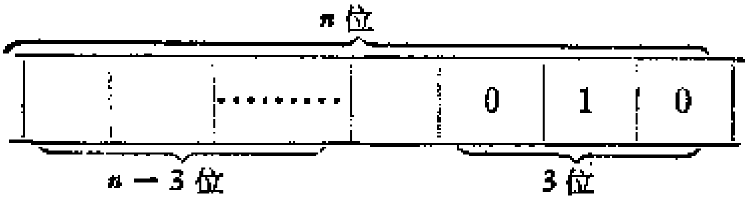
$$0\ \overline{0\ 1\ 0}\ 1\ 0\ \overline{0\ 1\ 0}\ 1\ 0.$$

而不是 4～6，9～11 位出现的 010 图象，即不是

$$0\ 0\ 1\ \overline{0\ 1\ 0}\ 0\ 1\ \overline{0\ 1\ 0}.$$

为了区别于前者起见，我们说 4～6，9～11 位是 010，但不是“出现 010 图象”，这作为约定。

为了找出关于数列 a_n 的递推关系，需对满足条件的数的结构进行分析。由于 n 位中除了最后三位是 010 已确定，其余 $n-3$ 位可取 0 或 1：



故最后 3 位是 010 的 n 位 2 进制数的个数是 2^{n-3}。其中包含最后 3 位出现 010 图象的以及在第 $n-4$ 位到第 $n-2$ 位出现 010 图象，而在最后 3 位并不出现 010 图象的两类数，后一种数为

$$\underbrace{\times\times\ \cdots\cdots\ \times}_{n-5\text{位}}\quad\underbrace{01010}_{n-4\sim n-2\text{位}}$$

故有

$$\begin{aligned}&a_n+a_{n-2}=2^{n-3},\quad n\geqslant 5,\\&a_3=1,\quad a_4=2.\end{aligned}\tag{2-8-6}$$

利用(2-9-6) 推得 $a_2=0,\ a_1=0,\ a_0=\frac{1}{2}$。

特征方程为

$$(x-2)(x^2+1)=0.$$

$$x_1=2,\ x_{2,3}=e^{\pm\frac{\pi}{2}i}.$$

设

$$a_n=A\cos\left(n\cdot\frac{\pi}{2}\right)+B\sin\left(n\cdot\frac{\pi}{2}\right)+C\cdot 2^n,$$

解方程组

$$\begin{cases}A+C=\dfrac{1}{2},\\B+2C=0,\\-A+4C=0.\end{cases}$$

得

$$\begin{cases} A = \dfrac{2}{5}, \\ B = -\dfrac{1}{5}, \\ C = \dfrac{1}{10}. \end{cases}$$

$$\therefore \quad a_n = \frac{2}{5}\cos\left(n\cdot\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{5}\sin\left(n\cdot\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{10}\cdot 2^n, n \geqslant 3.$$

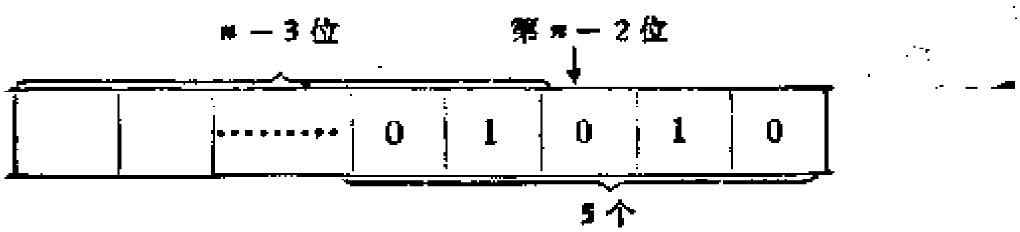
例 10. 求 n 位的 2 进制数中最后三位才第一次出现 010 图象的数的个数。

即求对 n 位 2 进制数 $b_1b_2\cdots b_n$ 从左而右扫描，第一次在最后三位出现 010 图象的数的个数。自然，最后三位除外任取连续三位都不会是 010 的。

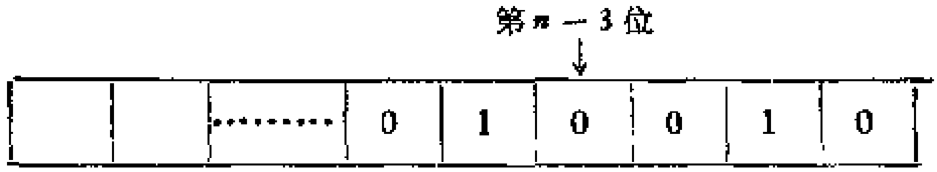
设 a_n 表满足条件的 n 位数个数，和前例类似，最后三位是 010 的 n 位 2 进制数共 2^{n-3} 个，对这 2^{n-3} 个数分析如下。

(a) 包含了在最后三位第 1 次出现 010 图象的数，其个数为 a_n，排除了在第($n-4$)到第($n-2$)位第 1 次出现 010 图象的可能。

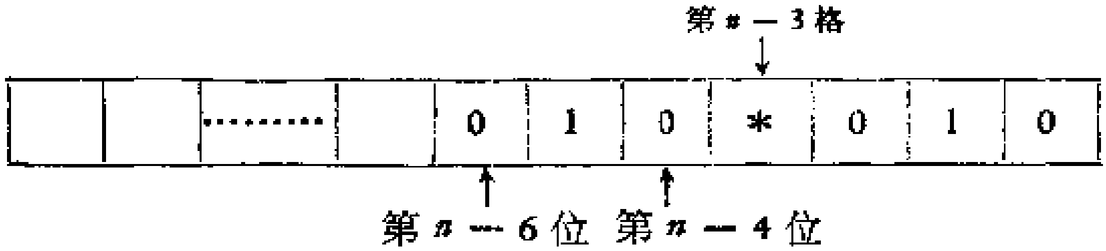
(b) 包含了在第($n-4$)到第($n-2$) 位第 1 次出现 010 图象的数，其个数为 a_{n-2}。



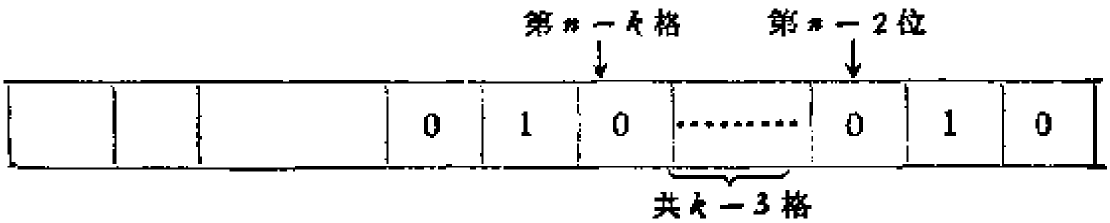
(c) 包含了在第($n-5$)位到第($n-3$)位第 1 次出现 010 图象的数，其个数是 a_{n-3}。



(d) 包含了在第($n-6$)位到第($n-4$)位第一次出现 010 图象的数，其个数为 $2a_{n-4}$，因在第 $n-3$ 位(打 * 号的格)可以取 0 或 1 两种状态。



一般可以归纳为对 $k \geqslant 3$，从第($n-k-2$)位到第 $n-k$ 位第一次出现 010 图象的数，其数目为 $2^{k-3}a_{n-k}$。从第 $n-k$ 位到第 $n-3$ 位中间的 $k-3$ 位可以取 0，1 两种值，故有 2^{k-3} 种状态。



故得递推关系如下：

$$a_n + a_{n-2} + a_{n-3} + 2a_{n-4} + \cdots + 2^{n-6}a_3 = 2^{n-3},\ n \geqslant 6,$$

$$a_3 = 1,\ a_4 = 2,\ a_5 = 3. \qquad (2\text{-}8\text{-}7)$$

$n=5$ 时有下面几种状态：

00010，10010，11010。

排除了 01010，因从左而右扫描时 01010 属于前三位出现 010 图象的。

请注意，递推关系(2-8-7)式不是常系数递推关系。

$$a_3 = 1,\ a_4 = 2,\ a_5 = 3,$$

故 $n=6$ 时有

$$a_6+a_4+a_3=2^3, \quad \therefore\ a_6=8-a_4-a_3=5.$$

$n=7$ 时有

$$a_7+a_5+a_4+2a_3=2^4, \quad a_7=16-a_5-a_4-2a_3=9.$$

其它依此类推。

令 $A(x)=1+2x+3x^2+a_6x^3+a_7x^4+\cdots$

$$
\begin{array}{ll}
x^3: & a_6+a_4+a_3=2^3 \\
x^4: & a_7+a_5+a_4+2a_3=2^4 \\
x^5: & a_8+a_6+a_5+2a_4+2^2a_3=2^5 \\
+) & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\hline
\end{array}
$$

$$[A(x)-1-2x-3x^2]+x^2[A(x)-1]$$
$$+(x^3+2x^4+2^2x^5+\cdots)A(x)=\frac{2^3x^3}{1-2x}.$$

整理得

$$\left(1+x^2+\frac{x^3}{1-2x}\right)A(x)=\frac{2^3x^3}{1-2x}+1+2x+4x^2.$$

$$\frac{1-2x+x^2-2x^3+x^3}{1-2x}A(x)=\frac{2^3x^3+1-4x^2+4x^2-8x^3}{1-2x}$$

$$=\frac{1}{1-2x}.$$

$$\therefore\quad A(x)=\frac{1}{1-2x+x^2-x^3}=1+2x+3x^2+5x^3$$
$$+9x^4+16x^5+28x^6+49x^7+\cdots$$

$\therefore\quad a_3=1,\ a_4=2,\ a_5=3,\ a_6=5,$

$a_7=9,\ a_8=16,\ a_9=28,\ a_{10}=49,$

$\cdots\cdots$

例 11. 解图 2-8-5 电路网络中的 $v_i, i=0,1,2,\cdots,n$。设其中 $v(t)=v$。

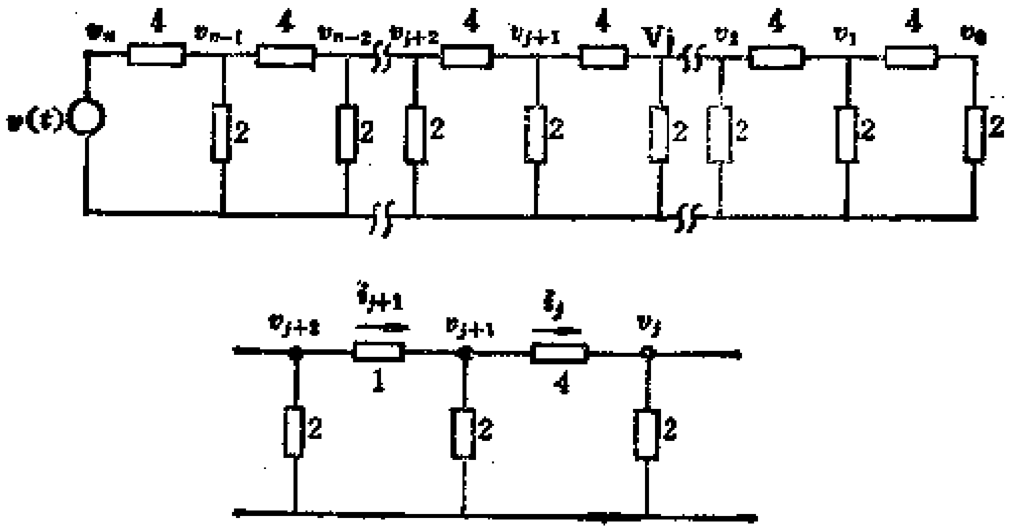


图 2-8-5

图 2-8-5 根据欧姆定律有

$$4i_{j+1} = v_{j+2} - v_{j+1},$$

$$4i_j = v_{j+1} - v_j.$$

$$\therefore \quad i_{j+1} = \frac{1}{4}(v_{j+2} - v_{j+1}), \tag{2-8-8}$$

$$i_j = \frac{1}{4}(v_{j+1} - v_j).$$

由于各点的电流代数和为零，

$$\therefore \quad i_{j+1} = i_j + \frac{1}{2}v_{j+1}. \tag{2-8-9}$$

(2-8-8)代入(2-8-9)得递推关系

$$\frac{1}{4}v_{j+2} - v_{j+1} + \frac{1}{4}v_j = 0, \tag{2-8-10}$$

或

$$v_{j+2} - 4v_{j+1} + v_j = 0, \ j = 0,1,2,\cdots,n-2.$$

由 v_0 点的电流代数和为零，可得

$$\frac{1}{4}(v_1 - v_0) = \frac{1}{2}v_0,$$

$$\therefore \quad v_1 = 3v_0.$$

特征方程是 $x^2 - 4x + 1 = 0$。

$$x = 2 \pm \sqrt{3}$$

设

$$v_n = A(2+\sqrt{3})^n + B(2-\sqrt{3})^n,$$

解方程组

$$\begin{cases} A + B = v_0, \\ (2+\sqrt{3})A + (2-\sqrt{3})B = 3v_0. \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} A = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}(1+\sqrt{3})v_0 \\ B = -\dfrac{1}{2\sqrt{3}}(1-\sqrt{3})v_0 \end{cases}$$

$$\therefore \quad v_n = \frac{v_0}{2\sqrt{3}}\left[(1+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^n - (1-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^n\right].$$

例 12. 求图 2-8-6 所示的 n 级网络等效电阻 R_n。

所谓等效电路，相当于图 2-8-6 中虚线所包围的块用一电阻 R_n 取代，使在两端点 n 和 n' 之间的效果一样。

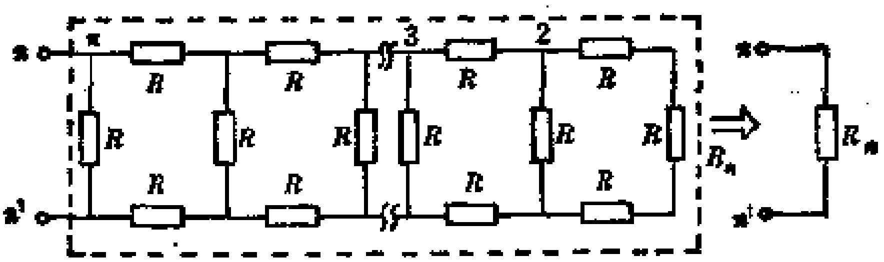


图 2-8-6

R_n 可以作为由 R_{n-1} 等效电阻如图 2-8-7 所示的方式串并联

构成的。

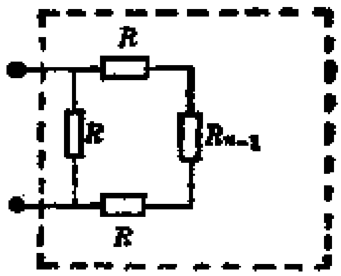


图 2-8-7

$$\therefore\quad \frac{1}{R_n}=\frac{1}{R}+\frac{1}{2R+R_{n-1}}=\frac{2R+R_{n-1}+R}{R(2R+R_{n-1})}$$

$$=\frac{3R+R_{n-1}}{R(2R+R_{n-1})}.$$

得递推关系如下

$$R_n=\frac{R(2R+R_{n-1})}{3R+R_{n-1}} \tag{2-8-11}$$

$$R_1=R,\quad R_2=\frac{3}{4}R.$$

令

$$R_n=\frac{a_n}{b_n},\ a_1=R,\ b_1=1,$$

因此

$$\frac{a_n}{b_n}=\frac{R\left(2R+\dfrac{a_{n-1}}{b_{n-1}}\right)}{3R+\dfrac{a_{n-1}}{b_{n-1}}}=\frac{2R^2b_{n-1}+Ra_{n-1}}{3Rb_{n-1}+a_{n-1}}.$$

令

$$\begin{cases}a_n=2R^2b_{n-1}+Ra_{n-1},\\ b_n=3Rb_{n-1}+a_{n-1}.\end{cases} \tag{2-8-12}$$

将 $a_{n-1}=b_n-3Rb_{n-1}$ 代入 $a_n=2R^2b_{n-1}+Ra_{n-1}$，得到

$$b_{n+1}-3Rb_n=2R^2b_{n-1}+R(b_n-3Rb_{n-1}),$$
$$b_{n+1}-4Rb_n+R^2b_{n-1}=0.$$
$$b_2=4R,\ b_0=0.$$
特征方程是 $x^2-4Rx+R^2=0$,

$$x=(2\pm\sqrt{3})R,$$
$$b_n=[A(2+\sqrt{3})^n+B(2-\sqrt{3})^n]R^n.$$

解方程组

$$\begin{cases}A+B=0,\\(2+\sqrt{3})A+(2-\sqrt{3})B=1/R.\end{cases}$$

得
$$\begin{cases}A=\dfrac{1}{2\sqrt{3}R},\\B=-\dfrac{1}{2\sqrt{3}R}.\end{cases}$$

$$\therefore\ b_n=\frac{R^{n-1}}{2\sqrt{3}}[(2+\sqrt{3})^n-(2-\sqrt{3})^n],$$
$$\begin{aligned}a_n&=b_{n+1}-3Rb_n\\&=\frac{R^n}{2\sqrt{3}}[(\sqrt{3}-1)(2+\sqrt{3})^n\\&\quad+(\sqrt{3}+1)(2-\sqrt{3})^n].\end{aligned}$$
$$\frac{a_n}{b_n}=\frac{(\sqrt{3}-1)(2+\sqrt{3})^n+(\sqrt{3}+1)(2-\sqrt{3})^n}{(2+\sqrt{3})^n-(2-\sqrt{3})^n}\times R\xrightarrow{n\to\infty}(\sqrt{3}-1)R.$$

例 13. 设有地址从 1 到 n 的单元，用以记录一组信息。这个信息的每个元素都占用两个单元，而且存放的地址是完全随机的，因而可能出现两个存放信息单元之间留一个空单元无法存放其它

信息。求这 n 个单元留下空单元的平均数。设这个平均数为 a_n.

i 个单元					$n-i-2$ 个单元		
1	2	…………	$i+1$	$i+2$	…………	$n-1$	n

存储单元如上图，设某一信息占用了第 $i+1$，$i+2$ 两个单元，把这组单元分割成两个部分，一是从 1 到 i，另一从 $i+3$ 到 n。由于用相邻两个单元的机率相等，

$$\therefore\quad a_n=\frac{1}{n-1}[(a_0+a_{n-2})+(a_1+a_{n-3})$$

$$+\cdots+(a_{n-2}+a_0)],$$

$$(n-1)a_n=2\sum_{k=0}^{n-2}a_k. \tag{2-8-13}$$

(2-8-13)式是变系数递推关系，可改为

$$(n-1)a_n-(n-2)a_{n-1}-2a_{n-2}=0,$$

$$a_0=0,\ a_1=1,\ a_2=0.$$

设

$$G(x)=a_1+a_3x^2+a_4x^3+a_5x^4+\cdots,$$

$$G'(x)=2a_3x+3a_4x^2+4a_5x^3+\cdots,$$

$$x:\quad 2a_3-a_2=2a_1,$$

$$x^2:\quad 3a_4-2a_3=2a_2,$$

$$x^3:\quad 4a_5-3a_4=2a_3,$$

$$+)\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$G'(x)-xG'=2xG.$$

$$\therefore\quad (1-x)G'=2xG,$$

$$\frac{G'}{G}=\frac{2x}{1-x}=-2+\frac{2}{1-x},$$

$$\ln G=-2x+\ln(1-x)^{-2}+C,$$

$$G = ke^{-2x}(1-x)^{-2}.$$

$$G|_{x=0} = a_1 = 1, \quad \therefore k = 1.$$

$$\begin{aligned} G &= e^{-2x}(1-x)^{-2} \\ &= \left[1 - 2x + \frac{(2x)^2}{2!} - \frac{(2x)^3}{3!} + \cdots\right] \\ &\quad \times (1 + 2x + 3x^2 + \cdots) \\ &= 1 + x^2 + \frac{2}{3}x^3 + x^4 + \frac{4}{15}x^5 + \cdots \end{aligned}$$

一般有

$$a_{n+1} = (n+1) - 2n + \frac{2^2}{2!}(n-1) - \frac{2^3}{3!}(n-2) + \cdots + (-1)^n\frac{2^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{2^k(n-k+1)}{k!}.$$

§9 错排问题

n 个有序的元素应有 $n!$ 个不同的排列，如若一个排列使得所有的元素都不在原来的位置上，则称这个排列为错排；有的叫重排。

以 1，2，3，4 四个数的错排为例，分析其结构，找出规律性的东西来。

1 2 的错排是唯一的，即 2 1。

1 2 3 的错排有 3 1 2，2 3 1。这二者可以看作是 1 2 错排，3 分别与 1，2 换位而得的。即

$$\overset{\frown}{2\ 1\ 3} \longrightarrow 3\ 1\ 2,$$

$$2\ \overset{\frown}{1\ 3} \longrightarrow 2\ 3\ 1.$$

1 2 3 4 的错排有

4 3 2 1，　4 1 2 3，　4 3 1 2，

3 4 1 2，　3 4 2 1，　2 4 1 3，

2 1 4 3，　3 1 4 2，　2 3 4 1.

第 1 列是 4 分别与 1、2、3 互换位置，其余两个元素错排，由此生成的。

第 2 列是由 4 和 3 1 2（123 的一个错排）的每一个数互换而得到的。即

$$3\ 1\ 2\ 4 \longrightarrow 4\ 1\ 2\ 3,$$

$$3\ 1\ 2\ 4 \longrightarrow 3\ 4\ 2\ 1,$$

$$3\ 1\ 2\ 4 \longrightarrow 3\ 1\ 4\ 2.$$

第 3 列则是由另一个错排 2 3 1 和 4 换位而得到，即

$$2\ 3\ 1\ 4 \longrightarrow 4\ 3\ 1\ 2,$$

$$2\ 3\ 1\ 4 \longrightarrow 2\ 4\ 1\ 3,$$

$$2\ 3\ 1\ 4 \longrightarrow 2\ 3\ 4\ 1.$$

上面分析的结果，实际上也是给出一种产生错排的方法。

设 n 个数 $1, 2, \cdots, n$ 错排的数目为 D_n，任取其中一数 i，数 i 分别与其它的 $n-1$ 个数之一互换，其余 $n-2$ 个数进行错排，共得 $(n-1)D_{n-2}$ 个错排。另一部分为数 i 以外的 $n-1$ 个数进行错排，然后 i 与其中每个数互换得 $(n-1)D_{n-1}$ 个错排。

综合以上分析得递推关系

$$D_n=(n-1)(D_{n-1}+D_{n-2}),\ D_1=0,\ D_2=1, \tag{2-9-1}$$

$$\therefore\quad D_0=1.$$

(2-9-1)是一非常系数的递推关系，下面提供一种解法。

$$\begin{aligned}\therefore\quad D_n-nD_{n-1}&=-[D_{n-1}-(n-1)D_{n-2}]\\&=(-1)^2[D_{n-2}-(n-2)D_{n-3}]\\&=\cdots=(-1)^{n-1}(D_1-D_0)\end{aligned}$$

由于 $D_1=1$，$D_0=0$，故得关于 D_n 的递推关系

$$D_n-nD_{n-1}=(-1)^n. \tag{2-9-2}$$

令

$$G_e(x)=D_0+D_1x+\frac{D_2}{2!}x^2+\frac{D_3}{3!}x^3+\cdots$$

$$\therefore \quad D_1=D_0+(-1)^1$$

$$D_2=D_1+(-1)^2$$

$$D_3=D_2+(-1)^3$$

$$\vdots$$

可得

$$G_e(x)-xG_e(x)=e^{-x}$$

$$G_e(x)=\frac{e^{-x}}{1-x}=\left(1-x+\frac{x^2}{2!}-\cdots\right)\Big/(1-x).$$

$$\therefore \quad D_n=\left(1-1+\frac{1}{2!}-\cdots\pm\frac{1}{n!}\right)\cdot n!$$

§10 Stirling 数

前面见到的递推关系都是一个参数的。Stirling 数问题则不然。它导出的递推关系是两个参数的。

(1) 多项式系数

n 个有区别的球放到两个有区别的盒子里，若要求第 1 个盒子放 k 个球，第 2 个盒子放 $n-k$ 个球 ($k=0,1,2,\cdots,n$)，方案数应是 $(x_1+x_2)^n$ 中 $x_1^kx_2^{n-k}$ 项的系数 $C(n,k)$。依据加法法则有

$$C(n,0)+C(n,1)+\cdots+C(n,n)=2^n.$$

可把上面的讨论推广到 n 个有区别的球放到 m 个有区别的盒子里，要求 m 个盒子放的球数分别是 $n_1,n_2,\cdots,n_m$ ($n=n_1+n_2+\cdots+n_m$) 的情况，其不同方案数用

$$\binom{n}{n_1\ n_2\cdots n_m}$$

表示。

从 n 个有区别的球中取 n_1 个放到第 1 个盒子里去，其选取方案数为$\binom{n}{n_1}$；当第 1 个盒子的 n_1 个球选定后，第 2 个盒子里的 n_2 个球则是从 $n-n_1$ 个中选取的，其方案数应为$\binom{n-n_1}{n_2}$；第 3 个盒子的 n_3 个球则是从 $n-n_1-n_2$ 中选取，其方案数为$\binom{n-n_1-n_2}{n_3}$；依此类推，根据乘法法则可得

$$\begin{aligned}\binom{n}{n_1n_2\cdots n_m} &= \binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3} \\ &\quad\cdots\binom{n-n_1-n_2-\cdots-n_{m-1}}{n_m} \\ &= \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!}\frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!} \\ &\quad\cdot\frac{(n-n_1-n_2)!}{n_3!(n-n_1-n_2-n_3)!}\cdots \\ &\quad\cdot\frac{n_m!}{n_m!0!}=\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_m!}. \end{aligned} \tag{2-10-1}$$

n 个有区别的球，放到 m 个有标志的盒子的问题，也可以考虑把 n 个有区别的球进行全排列．对于每一个排列依次取 n_1 个放到第 1 个盒子里，取 n_2 个放到第 2 个盒子，…，最后 n_m 个放到第 m 个盒子里．然而，放到盒子里的球不考虑球的顺序，故得不同的方案数为

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_m!}.$$

结果和(2-10-1)式一致。

称$\binom{n}{n_1 n_2 \cdots n_m}$为多项式系数。

$$(x_1+x_2+\cdots+x_m)^n = \overset{\text{第1项}}{(x_1+x_2+\cdots+x_m)}$$
$$\times \overset{\text{第2项}}{(x_1+x_2+\cdots+x_m)}\cdots$$
$$\times \overset{\text{第}n\text{项}}{(x_1+x_2+\cdots+x_m)}. \tag{2-10-2}$$

多项式 $(x_1+x_2+\cdots+x_m)^n$ 的展开式是由(2-10-2)式右端的 n 项中，每项各取一个元素相乘而得到的。

表达式(2-10-2)中共有 n 个因子项，令第 i 个因子项对应于第 i 个有标志的球，从第 i 个因子项中取 x_j 对应于把第 i 个有标志的球放到第 j 个盒子. (2-10-2)式展开的一般项 $x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_m^{n_m}$ $\times(n_1+n_2+\cdots+n_m=n)$表示第一个盒里有 n_1 个球，第二个盒子有 n_2 个球，等等。因此(2-10-2)式中 $x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_m^{n_m}$ 项的系数应为

$$\binom{n}{n_1\ n_2 \cdots n_m}.$$

即

$$(x_1+x_2+\cdots+x_m)^n = \sum_{n_1+n_2+\cdots+n_m=n}\binom{n}{n_1\ n_2\cdots n_m} \times x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_m^{n_m}. \tag{2-10-3}$$

定理： $(x_1+x_2+\cdots+x_m)^n$ 展开式的项数等于$\binom{n+m-1}{n}$，而且这些系数之和等于 m^n。

证明： $(x_1+x_2+\cdots+x_m)^n$ 展开式中的 $x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_m^{n_m}$ 项$(n_1+n_2+\cdots+n_m=n)$和从 m 个元素 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 中取 n

个作允许重复的组合一一对应。故得$(x_1+x_2+\cdots+x_m)^n$展开式的项数等于$\binom{n+m-1}{n}$。从m个中取n个作允许重复的组合的全体，对于每个球都有m个盒子可供选择，根据乘法法则有

$$\sum_{n_1+n_2+\cdots+n_m=n}\binom{n}{n_1\ n_2\cdots n_m}=m^n. \qquad (2\text{-}10\text{-}4)$$

■

(2) Stirling 数

只准备讨论其中的第二类 Stirling 数，至于第一类的 Stirling 数只准备给出它的定义和递推关系。

定义：
$$\begin{aligned}[x]_n&=x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)\\&=s(n,0)+s(n,1)x+s(n,2)x^2+\cdots\\&\quad+s(n,n)x^n.\end{aligned}$$

称$s(n,0)$、$s(n,1)$、$\cdots$、$s(n,n)$为第一类 Stirling 数。

$$\begin{aligned}[x]_{n+1}&=[s(n,0)+s(n,1)x+\cdots+s(n,n)x^n](x-n)\\&=s(n+1,0)+s(n+1,1)x+\cdots\\&\quad+s(n+1,n+1)x^{n+1},\end{aligned}$$

显然有

$$s(n+1,k)=s(n,k-1)-ns(n,k). \qquad (2\text{-}10\text{-}5)$$

定义： n个有区别的球放到m个相同的盒子中，要求无一空盒，其不同的方案数用$S(n,m)$表示，称为第二类 Stirling 数。

例如红、黄、蓝、白四种颜色的球，放到两个无区别的盒子里，不允许空盒，其方案有如下七种：

	1	2	3	4	5	6	7
第1盒子	r	y	b	w	ry	rb	rw
第2盒子	ybw	rbw	ryw	ryb	bw	yw	yb

其中r表红球，y表黄球，b表蓝球，w表白球，

$$\therefore \quad S(4,2)=7.$$

定理： 第二类 Stirling 数 $S(n,k)$ 有下列性质：

(a) $S(n,0)=0$，　　(b) $S(n,1)=1$，

(c) $S(n,2)=2^{n-1}-1$，　(d) $S(n,n-1)=C(n,2)$，

(e) $S(n,n)=1$。

证明： 公式 (a)、(b)、(e) 是显然的，只证 (c)，(d)。

(c) 设有 n 个不相同的球 $b_1,b_2,b_3,\cdots,b_n$，从中取出球 b_1，其余的 $n-1$ 个球，每个都有与 b_1 同盒，或不与 b_1 同盒两种选择。但必须排除一种情况，即全体与 b_1 都同盒，因这时另一盒将是空盒。故实际上只有 $2^{n-1}-1$ 种方案，即 $S(n,2)=2^{n-1}-1$。

(d) n 个球放到 $n-1$ 个盒子里，不允许有一空盒，故必有一盒有两个球。从 n 个有区别的球中取 2 个 共有 $C(n,2)$ 种组合方案。 ■

定理： 第二类 Stirling 数满足下面的递推关系，

$$S(n,m)=mS(n-1,m)+S(n-1,m-1), \quad (2\text{-}10\text{-}6)$$

$$(n>1,\ m\geqslant 1).$$

证明： 设有 n 个有区别的球 $b_1,b_2,\cdots,b_n$，从中取一个球设为 b_1。把 n 个球放到 m 个盒子无一空盒的方案的全体可分为两类，

(a) b_1 独占一盒，其方案数显然为 $S(n-1,m-1)$。

(b) b_1 不独占一盒，这相当于先将剩下的 $n-1$ 个球放到 m 个盒子，不允许空盒，共有 $S(n-1,m)$ 种不同方案，然后将 b_1 球放进其中一盒，从乘法法则得 b_1 不独占一盒的方案数应为 $mS(n-1,m)$。

根据加法法则有

$$S(n,m)=S(n-1,m-1)+mS(n-1,m). \quad ■$$

上面证明递推公式(2—10—6)的过程，也就是给出构造所有方案的办法。例如今将红、黄、蓝、白、绿五个球放到无区别的两个盒子里。

$$S(5,2)=2S(4,2)+S(4,1)=2\times 7+1=15,$$

故共有 15 种不同方案。

先把绿球取走，余下的四个球放到两个盒子的方案已见前面的例子。和前面一样用 r,y,b,w 分别表红，黄，蓝，白球，绿球用用 g 表之。故得表 2-10-1。

表 2-10-1

g 不独占一盒				g 独占一盒	
第 1 个盒子	第 2 个盒子	第 1 个盒子	第 2 个盒子	第 1 个盒子	第 2 个盒子
rg	ybw	r	$ybwg$	g	$rybw$
yg	rbw	y	$rbwg$		
bg	ryw	b	$rywg$		
wg	ryb	w	$rybg$		
ryg	bw	ry	bwg		
rbg	yw	rb	ywg		
rwg	yb	rw	ybg		

n 个球放到 m 个盒子里，依球和盒子是否有区别？是否允许空盒？共有 $2^3=8$ 种状态，其方案计数分别列于表 2-10-2 中。

表 2-10-2

n 个球	m 个盒子	是否空盒？	方案计数
有区别	有区别	有空盒	m^n
有区别	有区别	无空盒	$m!S(n,m)$ 若不考虑盒子区别时得 $S(n,m)$，然后 m 个盒进行排列．
有区别	无区别	有空盒	$S(n,1)+S(n,2)+\cdots+S(n,m)$，$n\geqslant m$． $S(n,1)+S(n,2)+\cdots+S(n,n)$，$n\leqslant m$．
有区别	无区别	无空盒	$S(n,m)$．
无区别	有区别	有空盒	$C(n+m-1,n)$，相当于 m 个有区别的元素取 n 个作允许重复的组合．
无区别	有区别	无空盒	$C(m+(n-m)-1,n-m)=C(n-1,n-m)=C(n-1,m-1)$，先取 m 个球每盒一个，余下的 $n-m$ 个无区别的球放到 m 个盒子中．

n个球	m个盒子	是否空盒	方　案　计　数
无区别	无区别	有空盒	$G(x)=\dfrac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)}$ 的 x^n 项系数，相当于 n 用$\{1,2,\cdots,m\}$进行拆分的拆分数.
无区别	无区别	无空盒	$G(x)=\dfrac{x^m}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)}$ 的 x^n项系数，等价于先取 m 个球放到 m 个盒子 每盒一个球，余下的 $n-m$ 个球按前面办法处理，相当于整数 $n-m$ 用$\{1,2,\cdots,m\}$进行拆分的拆分数.

利用公式 $S(n,m)=S(n-1,m-1)+mS(n-1,m)$，$S(n,1)=S(n,n)=1$，还可以如 Pascal 三角形一样得到表 2-10-3。

表 2-10-3

n \ m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1									
2	1	1								
3	1	3	1							
4	1	7	6	1						
5	1	15	25	10	1					
6	1	31	90	65	15	1				
7	1	63	301	350	140	21	1			
8	1	127	966	1701	1050	266	28	1		
9	1	255	3025	7770	6951	2646	462	36	1	
10	1	511	9330	34105	42525	22827	5880	750	45	1

§ 11　Catalan 数

这一节讨论 Catalan 数，其递推关系是非线性的，许多有意义的计数问题都导致这样的递推关系。本节将举出一些，后面还将

见到。

一个凸 n 边形，通过不相交于 n 边形内部的对角线，把 n 边形拆分成若干三角形，不同拆分的数目用 h_n 表之。

例如五边形有如下五种拆分方案，故 $h_5 = 5$。

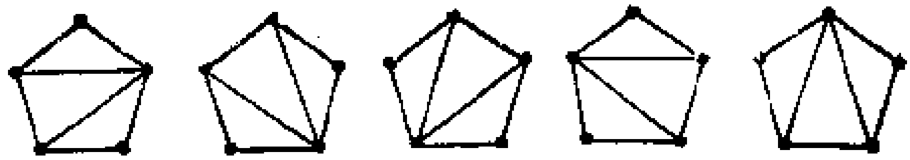


图 2-11-1

1. 递推关系

定理:

(a) $h_{n+1} = h_2h_n + h_3h_{n-1} + \cdots + h_nh_2$, (2-11-1)

(b) $(n-3)h_n = \frac{n}{2}(h_3h_{n-1} + h_4h_{n-2} + \cdots + h_{n-2}h_4 + h_{n-1}h_3)$. (2-11-2)

证明: (a)的证明:

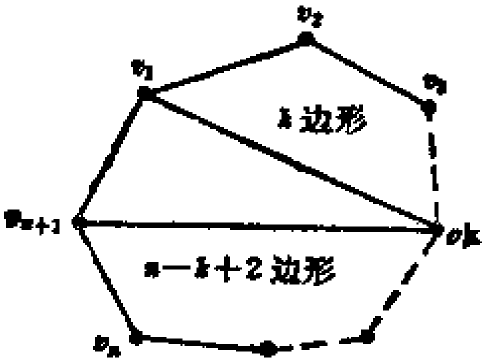


图 2-11-2

如图 2-11-2 所示，以 v_1v_{n+1} 作为一个边的三角形 $v_1v_kv_{n+1}$，将凸 $n+1$ 边形分割成两部分，一部分是 k 边形，另一部分是 $n-k+2$ 边形，$k=2,3,\cdots,n$，即 v_k 点可以是 v_2，v_3，$\cdots$，v_n 点中任意一点。依据加法法则有

$$h_{n+1} = \sum_{k=2}^{n} h_kh_{n-k+2}$$
$$= h_2h_n + h_3h_{n-1} + \cdots + h_{n-1}h_3 + h_nh_2.$$

(*b*) 的证明：

如图 2-11-3 所示，从 v_1 点向其它 $n-3$ 个顶点 $\{v_3, v_4, \cdots, v_{n-1}\}$ 可引出 $n-3$ 条对角线. 对角线 v_1v_k 把 n 边形分割成两个部分，因此以 v_1v_k 对角线作为拆分线的方案数为 h_kh_{n-k+2}.

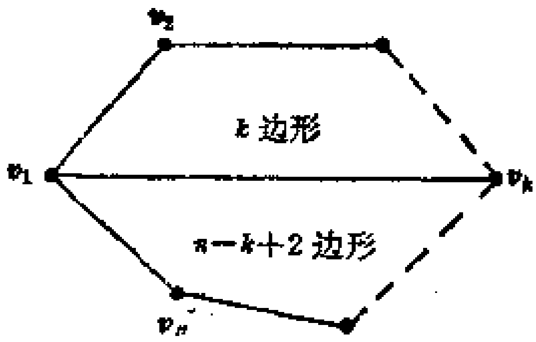


图 2-11-3

v_k 可以是 $v_3, v_4, \cdots, v_{n-1}$ 中任一点，对所有这些点求和得

$$h_3h_{n-1} + h_4h_{n-2} + \cdots + h_{n-2}h_4 + h_{n-1}h_3.$$

以 $v_2, v_3, \cdots, v_n$ 取代 v_1 点也有类似的结果. 但考虑到对角线有两个顶点，同一对角线在两个顶点分别计算了一次，作

$$\frac{n}{2}(h_3h_{n-1} + h_4h_{n-2} + \cdots + h_{n-2}h_4 + h_{n-1}h_3). \quad (2\text{-}11\text{-}3)$$

(2-11-3)式并不就给出剖分数，无疑其中是有重复的. 其重复度是由于一个凸 n 边形的剖分有 $n-3$ 条对角线，而对其每一条边计数时该剖分都计数了一次，故重复了 $n-3$ 次. 即(2-11-3)式给出的结果是 h_n 的 $n-3$ 倍.

$$\therefore \quad (n-3)h_n = \frac{n}{2}(h_3h_{n-1} + h_4h_{n-2} + \cdots + h_{n-2}h_4 + h_{n-1}h_3).$$

■

(2-11-1)式和(2-11-2)式都是非线性的递推关系.

2. Catalan 数计算公式.

由(2-11-1)式及 $h_2 = 1$，故得

$$h_{n+1} - 2h_n = h_3h_{n-1} + h_4h_{n-2} + \cdots + h_{n-1}h_3.$$

$$\therefore\quad (n-3)h_n=\frac{n}{2}(h_3h_{n-1}+h_4h_{n-2}+\cdots+h_{n-1}h_3)$$

$$=\frac{n}{2}(h_{n+1}-2h_n),$$

由 $(n-3)h_n=\dfrac{n}{2}(h_{n+1}-2h_n)$，整理得 $2(n-3)h_n=nh_{n+1}-2nh_n$。

$$\therefore\quad nh_{n+1}=(4n-6)h_n.$$

令 $f_{n+1}=nh_{n+1}$，

$$\therefore\quad f_{n+1}=(4n-6)\frac{f_n}{n-1}=\frac{2(2n-3)}{n-1}f_n$$

$$=\frac{(2n-2)(2n-3)}{(n-1)(n-1)}f_n.$$

即 $\dfrac{f_{n+1}}{f_n}=\dfrac{(2n-2)(2n-3)}{(n-1)(n-1)}$，$f_2=h_2=1$，

$$f_{n+1}=\frac{f_{n+1}}{f_n}\cdot\frac{f_n}{f_{n-1}}\cdot\frac{f_{n-1}}{f_{n-2}}\cdots\frac{f_4}{f_3}\cdot\frac{f_3}{f_2}$$

$$=\frac{(2n-2)(2n-3)}{(n-1)(n-1)}\cdot\frac{(2n-4)(2n-5)}{(n-2)(n-2)}$$

$$\cdots\frac{4\cdot 3}{2\cdot 2}\cdot\frac{2\cdot 1}{1\cdot 1}$$

$$=\frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!}=\binom{2n-2}{n-1}=nh_{n+1}.$$

$$\therefore\quad h_{n+1}=\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}.$$

3. 母函数方法

设 $G(x)=h_2+h_3x+h_4x^2+\cdots$，

$$x^2: h_4 = h_2h_3 + h_3h_2,$$
$$x^3: h_5 = h_2h_4 + h_3h_3 + h_4h_2,$$
$$x^4: h_6 = h_2h_5 + h_3h_4 + h_4h_3 + h_5h_2,$$
$$+)\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\begin{aligned} G(x) - x - 1 = {} & h_2(h_3x^2 + h_4x^3 + \cdots) \\ & + h_3x(h_2x + h_3x^2 + \cdots) \\ & + h_4x^2(h_2x + h_3x^2 + \cdots) + \cdots \\ = {} & -x + h_2(h_2x + h_3x^2 + h_4x^3 + \cdots) \\ & + h_3x(h_2x + h_3x^2 + h_4x^3 + \cdots) + \cdots. \end{aligned}$$

$\therefore\quad G(x) - 1 = x[G(x)]^2$，即 $xG^2 - G + 1 = 0$。

$$G = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}.$$

后面将看到只能取 $G = \dfrac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}$ 才有意义。

由二项式定理

$$(1+y)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}y + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}y^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}y^3 + \cdots,$$

$$\therefore\quad (1-4x)^{1/2} = 1 - 2x - \frac{1\cdot 1}{2^2\cdot 2!}4^2x^2 - \frac{1\cdot 1\cdot 3}{2^3 3!}4^3x^3 - \cdots - \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdots(2k-3)}{2^k k!}4^k x^k - \cdots,$$

即 $(1-4x)^{1/2}$ 中 x^{n+1} 项的系数为

$$\frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{2}\underbrace{\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n\right)}_{n\text{项}}(-4)^{n+1}$$

$$= \frac{(-1)^{2n+1}}{(n+1)!} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2^{n+1}} 2^{2n+2}$$

$$= -\frac{2^{n+1}}{(n+1)!} 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)$$

$$= \frac{-2(2n)!}{(n+1)(n!)^2} = \frac{-2}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

$\therefore \quad G(x) = \dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$ 的系数为正，而且得

$$h_{n+1} = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}.$$

从递推关系 $nh_{n+1} = (4n-6)h_n$，$h_2 = 1$，同样可推出

$$G(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}.$$

令 $G(x) = h_2 + h_3 x + h_4 x^2 + \cdots$，

$xG(x) = h_2 x + h_3 x^2 + h_4 x^3 + \cdots = G_1(x)$

x：$2h_3 = 4 \cdot 2h_2 - 6h_2$，

x^2：$3h_4 = 4 \cdot 3h_3 - 6h_3$，

$+)$ $\quad \cdots\cdots\cdots\cdots$

$G_1'(x) - 1 = 4[xG_1(x)]' - 6G_1(x)$，

$(1-4x)G_1'(x) + 2G_1(x) = 1$，$G_1(0) = 0$，

用 $\dfrac{1}{\sqrt{(1-4x)^3}}$ 乘等式两端得

$$\frac{1}{\sqrt{1-4x}} G_1'(x) + \frac{2G_1(x)}{\sqrt{(1-4x)^3}} = \frac{1}{\sqrt{(1-4x)^3}},$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\left[\frac{G_1(x)}{\sqrt{1-4x}}\right] = \frac{1}{\sqrt{(1-4x)^3}},$$

$$\therefore \frac{G_1(x)}{\sqrt{1-4x}} = \frac{1}{2\sqrt{1-4x}} + C.$$

即

$$G_1(x)=C\sqrt{1-4x}+\frac{1}{2},\ G_1(0)=0,\quad \therefore C=-\frac{1}{2},$$

$$G_1(x)=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2},$$

$$G(x)=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}.$$

4. 举例

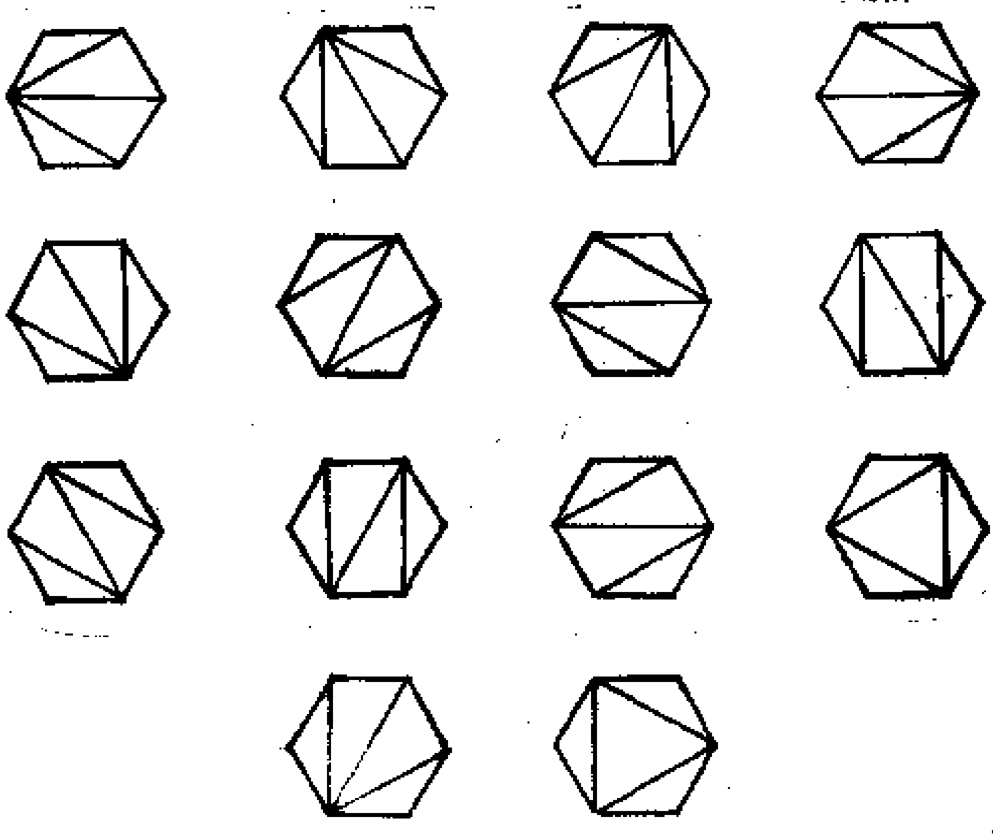


图 2-11-4

例 1. $h_6=\frac{1}{5}\binom{8}{4}=14$，见图 2-11-4

例 2. $P=a_1a_2a_3\cdots a_n$ 为 n 个数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的乘积，依据

乘法的结合律，不改变其顺序，只用括号表示成对的乘积。试问有几种不同的乘法方案？

令 p_n 表示 n 个数乘积的 $n-1$ 对括号插入的不同方案数。

$$p_n = p_1p_{n-1} + p_2p_{n-2} + \cdots + p_{n-1}p_1, p_1 = p_2 = 1.$$

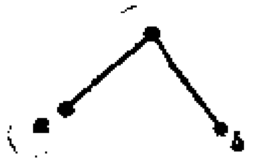
令 $p_k = h_{k+1}, k = 1,2,3,\cdots,n$，故得

$$h_{n+1} = h_2h_n + h_3h_{n-1} + \cdots + h_{n-1}h_3 + h_nh_2,$$

而且 $h_2 = h_3 = 1$。故 p_n 即为 Catalan 数 h_{n+1}。

以 $n=4$ 为例 $p_4 = h_5 = \frac{1}{4}\binom{6}{3} = 5$.

$$((a_1(a_2a_3))a_4),\ (((a_1a_2)a_3)a_4),\ ((a_1a_2)(a_3a_4)),\ (a_1(a_2(a_3a_4))),$$
$$(a_1((a_2a_3)a_4)). \qquad (2\text{-}11\text{-}4)$$



$(a\times b)$

图 2-11-5

p_4 = Catalan 数 h_5，下面建立(2-11-4)式中不同的乘法顺序和一个 5 边形不同拆分的一一对应关系，如图 2-11-6

$a\times b$ 运算用二分树表示，两片叶子分别表乘数和被乘数，分支点为运算符×，如图 2-11-5。

例3. n 个 1 和 n 个 0 组成一 $2n$ 位的 2 进制数，要求从左到右扫描，1 的累计数不小于 0 的累计数，试求满足这条件的数有多少？

下面介绍两种算法。

解法1. 设 p_{2n} 为这样所得的数的个数。在 $2n$ 位上填入 n 个 1 的方案数为 $\binom{2n}{n}$，不填 1 的其余 n 位自动填以数 0。从 $\binom{2n}{n}$ 中减去不符合要求的方案数即为所求。不合要求的数指的是从左而右扫描，出现 0 的累计数超过 1 的累计数的数。

不合要求的数的特征是从左而右扫描时，必然在某一奇数 $2m+1$ 位上首先出现 $m+1$ 个 0 的累计数，和 m 个 1 的累计数，

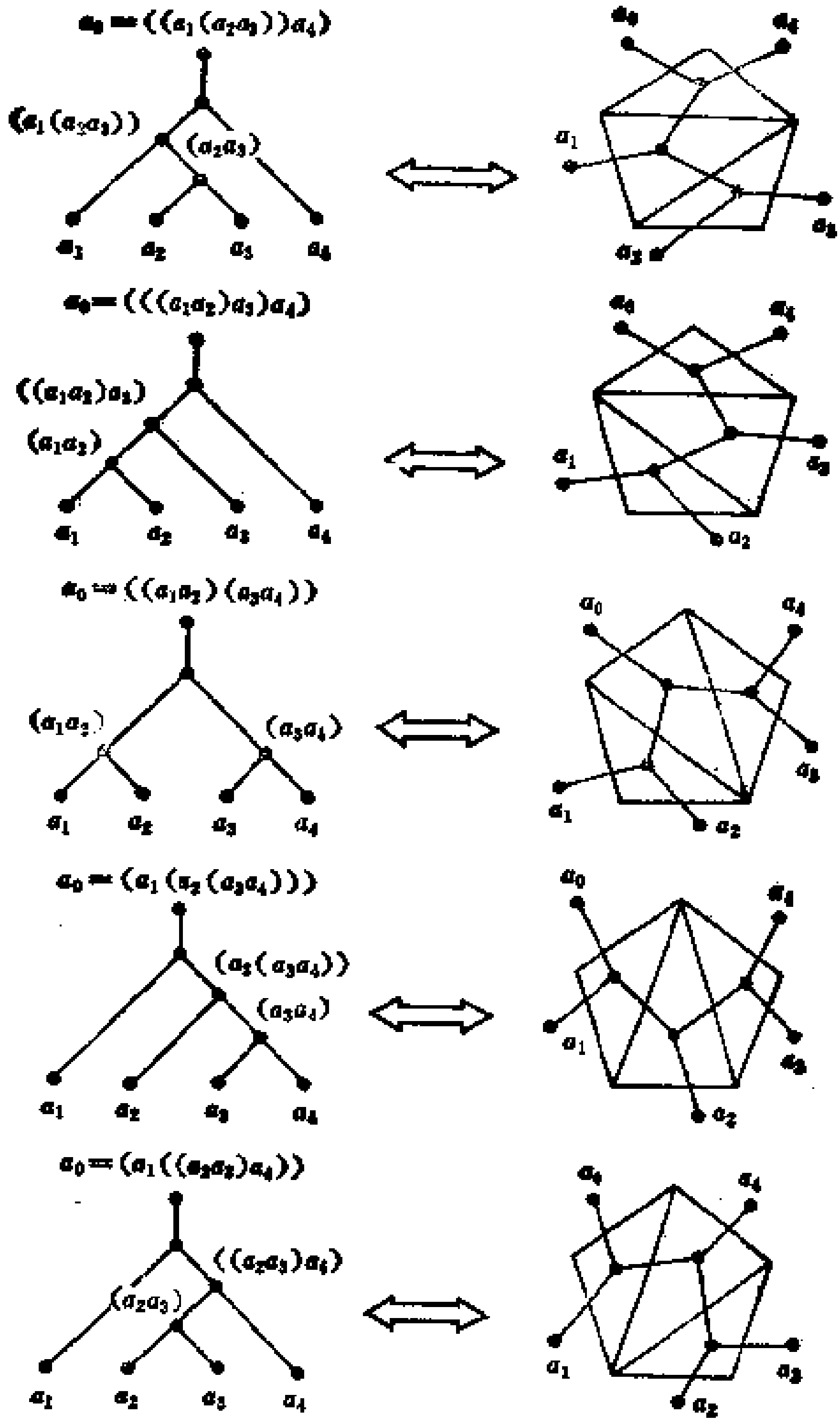


图 2-11-6

此后的 $2(n-m)-1$ 位上有 $n-m$ 个 1，$n-m-1$ 个 0。如若把后面这部分 $2(n-m)-1$ 位，0 与 1 互换，使之成为 $n-m$ 个

0，$n-m-1$个 1，结果得 1 个由 $n+1$ 个 0 和 $n-1$ 个 1 组成的 $2n$ 位数．即一个不合要求的数对应于一个由 $n+1$ 个 0 和 $n-1$ 个 1 组成的一个排列。

反过来，任何一个由 $n+1$ 个 0，$n-1$ 个 1 组成的 $2n$ 位数，由于 0 的个数多二个，$2n$ 是偶数，故必在某一个奇数位上出现 0 的累计数超过 1 的累计数。同样在后面的部分，令 0 和 1 互换，使之成为由 n 个 0 和 n 个 1 组成的 $2n$ 位数．即 $n+1$ 个 0 和 $n-1$ 个 1 组成的 $2n$ 位数，必对应于一个不合要求的数。

用上述的方法建立了由 $n+1$ 个 0 和 $n-1$ 个 1 组成的 $2n$ 位数，与由 n 个 0 和 n 个 1 组成的 $2n$ 位数中从左向右扫描出现 0 的累计数超过 1 的累计数的数一一对应。

例如 $1010\overset{*}{0}101$ 是由 4 个 0 和 4 个 1 组成的 8 位 2 进制数．但从左而右扫描在第 5 位（打 * 号）出现 0 的累计数 3 超过 1 的累计数 2，它对应于由 3 个1，5 个 0 组成的 10100010。

反过来 $1010\overset{*}{0}010$ 对应于 10100101。

因而不合要求的 $2n$ 位数与 $n+1$ 个 0，$n-1$ 个 1 组成的排列一一对应，故有

$$\begin{aligned}p_{2n}&=\binom{2n}{n}-\binom{2n}{n+1}=(2n)!\left[\frac{1}{n!n!}-\frac{1}{(n-1)!(n+1)!}\right]\\&=(2n)!\left[\frac{n+1}{(n+1)!n!}-\frac{n}{(n+1)!n!}\right]=\frac{(2n)!}{(n+1)!n!}\\&=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.\end{aligned}$$

解法 2. 这个问题可以一一对应于图 2-11-7 中从原点(0,0)到(n,n)点的路径要求中途所经过的点 (a,b) 满足关系 $a\leqslant b$。

对应的办法是从(0,0)出发，对 $2n$ 位数从左而右扫瞄，若遇到 1 便沿 y 轴正方向走一格；若遇到 0 便沿 x 轴正方向走一格．由

于有 n 个 0，n 个 1，故对应一条从(0,0)点到达 (n,n) 点的路径，由于要求 1 的累计数不少于 0 的累计数，故可以途经对角线 OA 上的点，但不允许穿越过对角线。反过来，满足这条件的路径对应一满足要求的 $2n$ 位 2 进制数。见图 2-11-8。

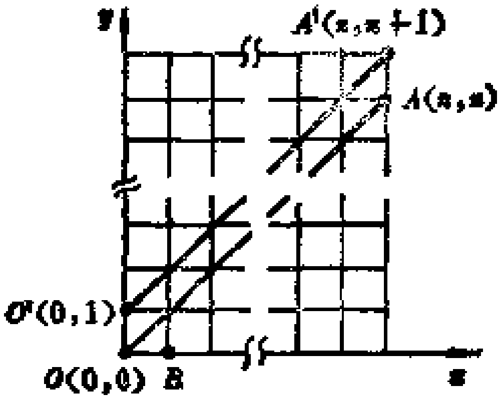


图 2-11-7

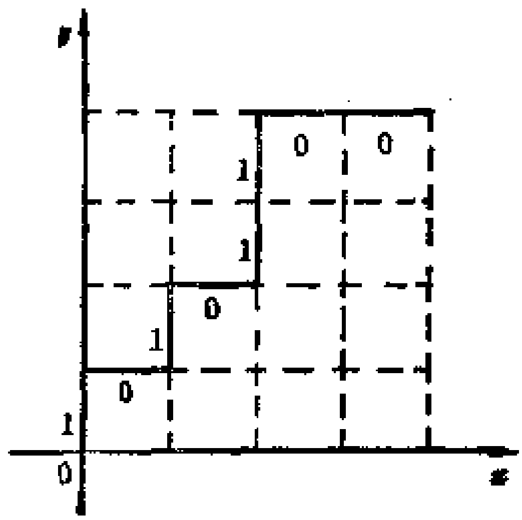


图 2-11-8

问题导致求从(0,0)出发，途经对角线 OA 及对角线上方的点到达 (n,n) 点的路径数。

从一点到另一点的路径数的讨论见第 1 章 § 3 例 1。见图 2-11-7，从 O 点出发经过 OA 及 OA 上方的点到达 A 点的路径对应一条从 O' 点出发经过 $O'A'$ 及 $O'A'$ 上方的点到达 A' 点的路径，这是显而易见的。

从 O' 点出发途径 OA 上的点到达 A' 点的路径，即为从 O' 点出发穿越 $O'A'$ 到达 A' 点的路径，故对应一从 O 点出发穿越 OA 到达 A 点的路径。

所以从 O 点出发经过 OA 及 OA 以上的点最后到达 A 点的路径数，等于从 O' 点出发到达 A' 点的所有路径数，减去从 O' 点出发路径 OA 上的点到达 A' 点的路径数。即

$$p_{2n}=\binom{2n}{n}-\binom{2n}{n+1}=(2n)!\left[\frac{1}{n!n!}-\frac{1}{(n+1)!(n-1)!}\right]$$
$$=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}=h_{n+2}.$$

例4. 由 n 个 1，n 个 0 组成的 $2n$ 位二进制数，要求从左向右扫瞄前 $2n-1$ 位时 1 的累计数大于 0 的累计数，求满足这样条件的数的个数。此问题可归结为图 2-11-7 中从 O 点出发只经过对角线 OA 上方的点抵达 A 点，求这样的路径数。相当于求从 $O'(0,1)$ 点不经过对角线 OA，抵达 $A'(n-1,n)$ 点的路径数。于是便转换为例 3 的问题。

根据例 3 的结果，从 $O'(0,1)$ 点通过 $O'A'$ 的点，以及 $O'A'$ 上方的点到达 $A'(n-1,n)$ 点的路径数为

$$\binom{2n-2}{n-1}-\binom{2n-2}{n}=(2n-2)!\left[\frac{1}{(n-1)!(n-1)!}-\frac{1}{n!(n-2)!}\right]=(2n-2)!\frac{n-n+1}{n!(n-1)!}$$
$$=\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}=h_{n+1}.$$

习　　题

1. 证明等式 $\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\binom{n}{2}^2+\cdots+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n}$.

2. 求 $(1+x^4+x^8)^{100}$ 中 x^{20} 项的系数。

3. 有红、黄、蓝、白球各两个，绿、紫、黑的球各 3 个，问从中取出 10 个球，试问有多少种不同的取法？

4. 求由 A,B,C,D 组成的允许重复的排列中 AB 至少出现一次的排列数目。

5. 求 n 位四进制数中 2 和 3 必须出现偶数次的数目。

6. 试求由 a,b,c 三个文字组成的 n 位符号串中不出现 aa 图象的符号串

的数目。

7.证明序列 $C(n,n)$, $C(n+1,n)$, $C(n+2,n)$, ……的母函数为 $\frac{1}{(1-x)^{n+1}}$。

8.证明 $C(n,n)+C(n+1,n)+\cdots+C(n+m,n)=C(n+m+1,n+1)$。

9.利用 $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$,改善§4(2)的 p_n 估计式.

10. 8台计算机分给3个单位,第1单位的分配量不超过3台,第2单位不超过4台,第3个单位不超过5台,问共有几种分配方案?

11.证明正整数 n 都可以唯一地表示成不同的且不相邻的 Fibonacci 数之和。即

$$n=\sum_{i\geq 2}a_iF_i,\ a_ia_{i+1}=0,\ a_i=0,1.$$

注意 $F_1=F_2=1$ 是相同的 Fibonacci 数。

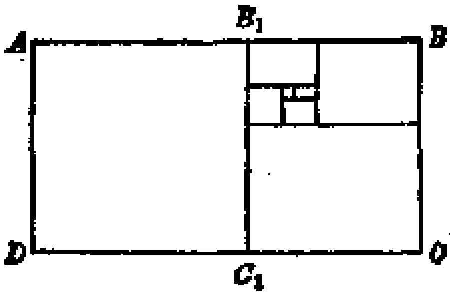
12.设空间的 n 个平面两两相交,每3个平面有且仅有一个公共点,任意4个平面都不共点。这样的 n 个平面把空间分割成多少个不重迭的域?

13.相邻位不同为0的 n 位2进制数中一共出现了多少个0?

14.在 Hanoi 塔问题中,在柱 A 上从上到下套着 n 个圆盘,其编号依次从1到 n。现要将奇数编号与偶数编号的圆盘分别转移到柱 B 和柱 C 上,转移规则仍然是每次移动一个,始终保持上面的比下面的小。一共要移动多少次?

15.一书框中有 m 格,每格各放 n 册同类的书,不同格放的书类型不同。现取出整理后重新放回,但不打乱相同类。试问无一本放在原来位置的方案数应多少?

16.设一矩形 $ABCD$,其中 $AB:AD=\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$。作 C_1B_1 使得



AB_1C_1D 是一正方形. 试证矩形 B_1C_1CB 和 $ABCD$ 相似. 试证继续这过程可得一和原矩形相似的矩形序列.

17. 平面上有两两相交,无三线共点的 n 条直线,试求这 n 条直线把平面分成多少个域?

18. 在一圆周上取 n 个点, 过一对顶点可作一弦, 不存在三弦共点的现象,求弦把圆分割成几部分?

19. 求 n 位二进制数中相邻两位不出现 11 的数的个数。

20. 从 n 个文字中取 k 个文字作允许重复的排列, 但不允许一个文字连续出现三次,求这样的排列的数目.

21. 求 $1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4$ 的和.

22. 求矩阵 $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{100}$.

23. 求 $S_n=\sum_{k=0}^{n} k(k-1)$, $S_n=\sum_{k=0}^{n} k(k+2)$,

$$S_n=\sum_{k=0}^{n} k(k+1)(k+2).$$

24. 在一个平面上画一个圆,然后一条一条地画 n 条与圆相交的直线。当 r 是大于 1 的奇数时,第 r 条直线只与前 $r-1$ 条直线之一在圆内相交. 当 r 是偶数时,第 r 条直线与前 $r-1$ 条在圆内都相交. 如果无 3 条直线在圆内共点,这 n 条直线把圆分割成多少个不重迭的部分?

25. 用 a_n 记具有整数边长周长为 n 的三角形的个数。

(a) 证明

$$a_n=\begin{cases} a_{n-3}, & \text{当 } n \text{ 是偶数,} \\ a_{n-3}+\dfrac{n+(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{4}, & \text{当 } n \text{ 是奇数.} \end{cases}$$

(b) 求序列$\{a_n\}$的普通型母函数.

26. (a) 证明边长为整数、最大边长为 l 的三角形的个数是

$$\frac{1}{4}(l+1)^2 \qquad \text{当 } l \text{ 是奇数,}$$

$$\frac{1}{4}(l+2)^2 \qquad \text{当 } l \text{ 是偶数。}$$

(*b*) 设 f_n 记边长不超过 $2n$ 的三角形的个数，而 g_n 记边长不超过 $2n+1$ 的三角形的个数，求 f_n 和 g_n 的表达式。

27.设 $n\geqslant 0$，$a_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n+k}{2k}$，$b_n=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+k}{2k+1}$。

(*a*) 证明 $a_{n+1}=a_n+b_{n+1}$，$b_{n+1}=a_n+b_n$。

(*b*) 求序列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$的母函数。

(*c*) 用 Fibonacci 数来表 a_n 与 b_n。

28.设 $F_1=F_2=1$，$F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$。

(*a*) 证明 $F_n=F_kF_{n-k+1}+F_{k-1}F_{n-k}$，$n>k>1$。

(*b*) 证明 $F_n|F_m$ 的充要条件是 $n|m$。

(*c*) 证明

$$F_mF_n=F_{m+n-2}+F_{m+n-6}+F_{m+n-10}+\cdots+\begin{cases}F_{m-n+1}, & \text{当 } n \text{ 是奇数,}\\ F_{m-n+2}, & \text{当 } n \text{ 是偶数.}\end{cases}$$

$m\geqslant n\geqslant 2$.

(*d*) 证明 $(F_m,F_n)=F_{(m,n)}$，(m,n) 为 m,n 的最大公约数。

29.从 1 到 n 的自然数中选取 k 个不同且不相邻的数，设此选取的方案数为 $f(n,k)$。

(*a*) 求 $f(n,k)$ 的递推关系。

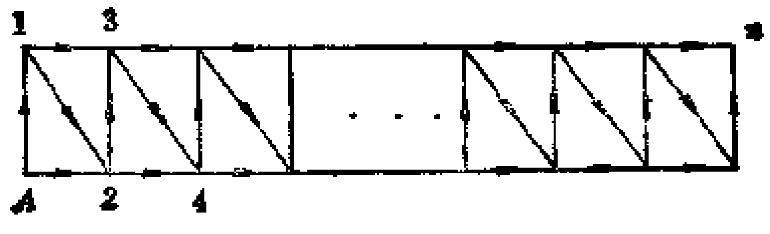
(*b*) 用归纳法求 $f(n,k)$。

(*c*) 若设 1 与 n 算是相邻的数，并设在此假定下从 1 到 n 的自然数中选取 k 个不同且不相邻的 k 个数的方案数为 $g(n,k)$，利用 $f(n,k)$求 $g(n,k)$。

30.设 $S_2(n,k)$ 是第二类 Stirling 数。证明

$$S_2(n+1,m)=\sum_{k=m-1}^{n}\binom{n}{k}S_2(k,m-1).$$

31.求下图中从 A 点出发到 n 点的路径数。



32. n 位 0，1 符号串，求从左向右只在最后两位才出现 0，0 的符号串数目。

33. 试证

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}.$$

第三章　容斥原理和鸽巢原理

§1　引　　论

在这一章里将讨论组合数学中两个重要原理，其中之一的容斥原理是在计数中常用到的一种方法，它所研究的问题先举例如下。

例. 求不超过 20 的正整数中是 2 的倍数或 3 的倍数的数的数目.

不超过 20 的正整数中是 2 的倍数的数有 10 个，即

$$2,4,6,8,10,12,14,16,18,20.$$

不超过 20 的正整数中是 3 的倍数的数有 6 个，即

$$3,6,9,12,15,18.$$

但不超过 20 的正整数中是 2 的倍数，或是 3 的倍数的数不是 $10+6=16$ 个，而是下列 13 个，

$$2,3,4,6,8,9,10,12,14,15,16,18,20.$$

其中 6,12,18 三个数既是 2 的倍数又是 3 的倍数. 如若把是 2 的倍数的数和是 3 的倍数的数数目相加时，则 6,12,18 三个数各重复算一次.

容斥原理研究的是若干有限集合的交或并的计数.

在讨论过程中要用到集合论的基本性质，例如 DeMorgan 定理：若 A 和 B 是集合 U 的子集，则

(a) $\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$,

(b) $\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$.

证：(*a*) 的证明。

设 $x\in\overline{A\cup B}$，则 $x\notin A\cup B$。

$x\notin A\cup B$ 相当于 $x\notin A$ 和 $x\notin B$ 同时成立，亦即

$$x\in\overline{A\cup B}\Rightarrow x\in\bar{A}\cap\bar{B}. \tag{3-1-1}$$

反之，若 $x\in\bar{A}\cap\bar{B}$，即 $x\in\bar{A}$ 和 $x\in\bar{B}$。故 $x\notin A$ 和 $x\notin B$，亦即 $x\notin A\cup B$。

$$\therefore \quad x\in\bar{A}\cap\bar{B}\Rightarrow x\in\overline{A\cup B} \tag{3-1-2}$$

由(3-1-1)和(3-1-2)得

$$x\in\bar{A}\cap\bar{B}\Leftrightarrow x\in\overline{A\cup B}.$$

(*b*) 的证明和 (*a*) 类似，从略。

De Morgan 定理的推广：设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是U的子集。

则 (*a*) $\overline{A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n}=\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap\cdots\cap\bar{A}_n$。

(*b*) $\overline{A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n}=\bar{A}_1\cup\bar{A}_2\cup\cdots\cup\bar{A}_n$。

证：只证(*a*)。$n=2$ 时定理已证。设定理对 n 是正确的，即假定 $\overline{A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n}=\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap\cdots\cap\bar{A}_n$ 正确，则

$$\overline{A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup A_{n+1}}=\overline{(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)\cup A_{n+1}}$$

$$=\overline{(A_1\cup A_2\cup\cdots A_n)}\cap\overline{A_{n+1}}=\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap\cdots\cap\bar{A}_n\cap\bar{A}_{n+1}.$$

即定理对 $n+1$ 也是正确的。

(*b*) 的证明和 (*a*) 类似，从略。 ■

§2 容斥原理

最简单的计数问题是求有限集合 A 和 B 的并的元素数目。显然有

定理:

$$|A\cup B| = |A| + |B| - |A\cap B|. \qquad (3\text{-}2\text{-}1)$$

即具有性质A或B的元素个数等于具有性质A的元素个数与具有性质B的元素个数的和，减去同时具有性质A和B的元素个数。

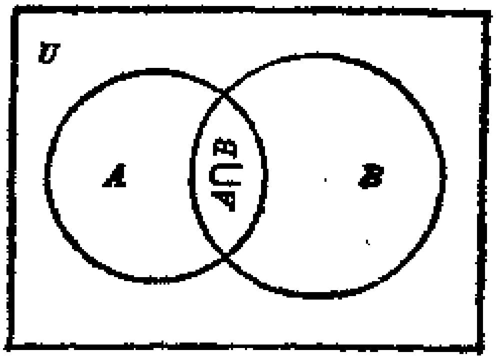


图 3-2-1

定理:

$$|A\cup B\cup C| = |A| + |B| + |C| - |A\cap B|$$
$$- |A\cap C| - |B\cap C| + |A\cap B\cap C|. \qquad (3\text{-}2\text{-}2)$$

证明:

$$|A\cup B\cup C| = |(A\cup B)\cup C| = |A\cup B| + |C|$$
$$- |(A\cup B)\cap C|.$$

根据 $$(A\cup B)\cap C = (A\cap C)\cup(B\cap C),$$

$$|A\cup B\cup C| = |A| + |B| + |C| - |A\cap B|$$
$$- |(A\cap C)\cup(B\cap C)| = |A| + |B| + |C| - |A\cap B|$$
$$- |A\cap C| - |B\cap C| + |A\cap B\cup C|.$$

■

以后不特别说明，A_1、A_2、…、A_n 都是集合U的子集。

例 一个学校只有三门课程：数学、物理、化学。已知修这三门课的学生分别有 170、130、120 人；同时修数学、物理两门课的学生 45 人；同时修数学、化学的 20 人；同时修物理、化学的 22 人；同时修三门课的学生 3 人。问这学校共有多少学生？

令：M 为修数学课的学生集合；

P 为修物理课的学生集合；

C 为修化学课的学生集合。

$|M| = 170$，$|P| = 130$，$|C| = 120$，$|M\cap P| = 45$，

$|M\cap C| = 20$，$|P\cap C| = 22$，$|M\cap P\cap C| = 3$。

$$|M\cup P\cup C| = |M| + |P| + |C| - |M\cap P| - |M\cap C| - |P\cap C| + |M\cap P\cap C| = 170 + 130 + 120 - 45 - 20 - 22 + 3 = 336。$$

即学校的学生数为 336 人。

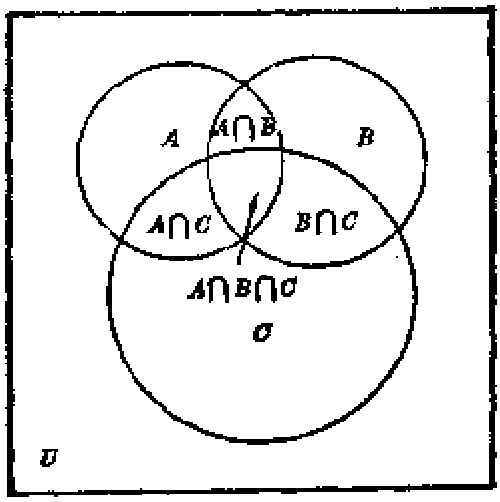


图 3-2-2

同理可推出

$$|A\cup B\cup C\cup D| = |A| + |B| + |C| + |D| - |A\cap B| - |A\cap C| - |A\cap D| - |B\cap C| - |B\cap D| - |C\cap D| + |A\cap B\cap C| + |A\cap B\cap D| + |B\cap C\cap D| + |A\cap C\cap D| - |A\cap B\cap C\cap D|。\qquad (3\text{-}2\text{-}3)$$

利用数学归纳法可以证得一般的定理：

定理：设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是有限集合，则

$$|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n|=\sum_{i=1}^{n}|A_i|-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}|A_i\cap A_j|$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}\sum_{k>j}|A_i\cap A_j\cap A_k|-\cdots$$

$$+(-1)^{n-1}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|. \tag{3-2-4}$$

证：用数学归纳法证明。

已知 $n=2$ 时有 $|A_1\cup A_2|=|A_1|+|A_2|-A_1\cap A_2|$。

设 $|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{n-1}|=\sum_{i=1}^{n-1}|A_i|-\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j>i}|A_i\cap A_j|$

$$+\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j>i}\sum_{k>j}|A_i\cap A_j\cap A_k|-\cdots$$

$$+(-1)^{n}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_{n-1}|.$$

$$\therefore |A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{n-1}\cup A_n|=|(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{n-1})\cup A_n|$$

$$=|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{n-1}|+|A_n|$$

$$-|(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{n-1})\cap A_n|.$$

但 $(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{n-1})\cap A_n=(A_1\cap A_n)\cup(A_2\cap A_n)$

$\cdots\cup(A_{n-1}\cap A_n)$，

$$\therefore |(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{n-1})\cap A_n|=|(A_1\cap A_n)\cup(A_2\cap A_n)$$

$$\cup\cdots\cup(A_{n-1}\cap A_n)|=|A_1\cap A_n|+|A_2\cap A_n|+\cdots$$

$$+|A_{n-1}\cap A_n|-|A_1\cap A_2\cap A_n|-|A_1\cap A_3\cap A_n|-\cdots$$

$$-|A_{n-2}\cap A_{n-1}\cap A_n|+\cdots+(-1)^n|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|$$

$$=\sum_{i=1}^{n-1}|A_i\cap A_n|-\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j>i}|A_i\cap A_j\cap A_n|+\cdots$$

$$+(-1)^n|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|.$$

$$\therefore |A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{n-1}\cup A_n|=\sum_{i=1}^{n}|A_n|-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}|A_i\cap A_j|$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}\sum_{k>j}|A_i\cap A_j\cap A_k|-\cdots$$
$$+(-1)^{n-1}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|.$$

■

又 $|\bar{A}|=N-|A|$，其中N是集合U的元素个数，即不属于A的元素个数等于集合的全体去掉属于A的元素的个数。一般有

$$|\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap\cdots\cap\bar{A}_n|=N-|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n|=N$$
$$-\sum_{i=1}^{n}|A_i|+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}|A_i\cap A_j|$$
$$-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}\sum_{k>j}|A_i\cap A_j\cap A_k|+\cdots$$
$$+(-1)^n|A_1\cap A_2\cdots\cap A_n|. \tag{3-2-5}$$

所谓容斥原理指的就是(3-2-4)和(3-2-5)这两个公式。

§3 例

例 1. 求 a,b,c,d,e,f 六个字母的全排列中不允许出现 ace 和 df 图象的排列数。

解: 设 A_1 为 ace 作为一个元素出现的排列集，A_2 为 df 作为一个元素出现的排列集，$A_1\cap A_2$ 为同时出现 ace、df 的排列集。

$\therefore |A_1|=4!,|A_2|=5!,|A_1\cap A_2|=3!.$

根据容斥原理，不允许出现 ace 和 df 的排列数为

$$|\bar{A}_1\cap\bar{A}_2|=6!-(5!+4!)+3!=582.$$

例 2. 求从 1 到 500 的整数中被 3 或 5 除尽的数的个数。

令 A_1 为 1 到 500 的整数中被 3 除尽的数的集合，A_2 为 1 到 500 的整数中被 5 除尽的数的集合。

$$|A_1| = \left[\frac{500}{3}\right] = 166, \quad |A_2| = \left[\frac{500}{5}\right] = 100;$$

$$|A_1 \cap A_2| = \left[\frac{500}{15}\right] = 33.$$

被 3 或 5 除尽的数的个数为

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| = 166 + 100 - 33 = 233.$$

例 3. 求由 a, b, c, d 四个字符构成的 n 位符号串中，a, b, c 至少出现一次的符号串的数目。

令 A_1、A_2、A_3 分别为 n 位符号串中不出现 a, b, c 符号的集合。

由于 n 位符号串中每一位都可取 a, b, c, d 四种符号中的一个，故不允许出现 a 的 n 位符号串的个数应是 3^n，即

$$|A_i| = 3^n. \quad i = 1, 2, 3.$$

$$|A_i \cap A_j| = 2^n, i \neq j, i, j = 1, 2, 3.$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 1.$$

a、b、c 至少出现一次的 n 位符号串集合即为 $\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3$.

$$|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3| = 4^n - (|A_1| + |A_2| + |A_3|) + (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) - |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 4^n - 3 \cdot 3^n + 3 \cdot 2^n - 1.$$

例 4. 求不超过1 20 的素数个数。

因 $11^2 = 121$，故不超过120的合数必然是 2、3、5、7 的倍数，而且不超过 120 的合数的因子不可能都超过 11。

设 A_i 为不超过 120 的数 i 的倍数集，$i = 2, 3, 5, 7$.

$$|A_2| = \left[\frac{120}{2}\right] = 60, \quad |A_3| = \left[\frac{120}{3}\right] = 40,$$

$$|A_5| = \left[\frac{120}{5}\right] = 24, \quad |A_7| = \left[\frac{120}{7}\right] = 17,$$

$$|A_2 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{120}{2 \times 3} \right\rfloor = 20,$$

$$|A_2 \cap A_5| = \left\lfloor \frac{120}{10} \right\rfloor = 12,$$

$$|A_2 \cap A_7| = \left\lfloor \frac{120}{14} \right\rfloor = 8,$$

$$|A_3 \cap A_5| = \left\lfloor \frac{120}{15} \right\rfloor = 8,$$

$$|A_3 \cap A_7| = \left\lfloor \frac{120}{21} \right\rfloor = 5,$$

$$|A_5 \cap A_7| = \left\lfloor \frac{120}{35} \right\rfloor = 3,$$

$$|A_2 \cap A_3 \cap A_5| = \left\lfloor \frac{120}{2 \times 3 \times 5} \right\rfloor = 4,$$

$$|A_2 \cap A_3 \cap A_7| = \left\lfloor \frac{120}{2 \times 3 \times 7} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{120}{42} \right\rfloor = 2,$$

$$|A_2 \cap A_5 \cap A_7| = \left\lfloor \frac{120}{2 \times 5 \times 7} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{120}{70} \right\rfloor = 1,$$

$$|A_3 \cap A_5 \cap A_7| = \left\lfloor \frac{120}{3 \times 5 \times 7} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{120}{105} \right\rfloor = 1,$$

$$|A_2 \cap A_3 \cap A_5 \cap A_7| = \left\lfloor \frac{120}{2 \times 3 \times 5 \times 7} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{120}{210} \right\rfloor = 0,$$

$$\begin{aligned}
|\overline{A}_2 \cap \overline{A}_3 \cap \overline{A}_5 \cap \overline{A}_7| = {} & 120 - |A_2| - |A_3| - |A_5| - |A_7| \\
& + |A_2 \cap A_3| + |A_2 \cap A_5| + |A_2 \cap A_7| + |A_3 \cap A_5| \\
& + |A_3 \cap A_7| + |A_5 \cap A_7| - |A_2 \cap A_3 \cap A_5| \\
& - |A_2 \cap A_3 \cap A_7| - |A_2 \cap A_5 \cap A_7| \\
& - |A_3 \cap A_5 \cap A_7| + |A_2 \cap A_3 \cap A_5 \cap A_7| \\
= {} & 120 - (60 + 40 + 24 + 17) + (20 + 12 \\
& + 8 + 8 + 5 + 3) - (4 + 2 + 1 + 1) = 27.
\end{aligned}$$

请注意，27 这个数并非就是不超过 120 的素数个数，因为这里排除了 2,3,5,7 四个数，又包含 1 这个非素数。2,3,5,7 本身是素数。故所求的不超过 120 的素数个数应为

$$27+4-1=30.$$

例 5. 用 26 个英文字母作不允许重复的全排列，要求排除 dog、god、gum、depth、thing 字样的出现，求满足这些条件的排列数。在所有的排列中，令

A_1 为出现 dog 的排列的全体；

A_2 为出现 god 的排列的全体；

A_3 为出现 gum 的排列的全体；

A_4 为出现 depth 的排列的全体；

A_5 为出现 thing 的排列的全体；

出现 dog 字样的排列，相当于把 dog 作为一个单元参加排列，故 $|A_1|=24!$。

类似地有 $|A_2|=|A_3|=24!$，$|A_4|=|A_5|=22!$。

由于 god、dog 不可能在一个排列中同时出现，故

$$|A_1\cap A_2|=0;$$

类似的理由，$|A_2\cap A_3|=0$，$|A_1\cap A_4|=0$。

由于 gum 和 dog 可以在 dogum 字样中同时出现，故

$$|A_1\cap A_3|=22!.$$

类似的理由 god 和 depth 可以在 godepth 字样中同时出现，故 $|A_2\cap A_4|=20!$。

god 和 thing 可以在 thingod 字样中同时出现，故

$$|A_2\cap A_5|=20!.$$

$$|A_1\cap A_5|=0,\ |A_3\cap A_4|=|A_3\cap A_5|=20!,$$

$$|A_4\cap A_5|=19!,$$

$$|A_1\cap A_2\cap A_3|=0,\ |A_1\cap A_2\cap A_4|=0,$$

$$|A_1\cap A_2\cap A_5|=0,\quad |A_1\cap A_3\cap A_4|=0,$$
$$|A_1\cap A_3\cap A_5|=0,\quad |A_1\cap A_4\cap A_5|=0,$$
$$|A_2\cap A_3\cap A_4|=0,$$
$$|A_2\cap A_3\cap A_5|=0.$$

由于god、depth、thing不可以同时出现，故$|A_2\cap A_4\cap A_5|=0$.

$$|A_3\cap A_4\cap A_5|=17!.$$

其余多于3个集合的交集均为空集，不一一列举。故所求的满足要求的排列数为

$$26!-3\times 24!-2\times 22!+22!+4\times 20!+19!$$
$$-17!=26!-3\times 24!-22!+4\times 20!+19!$$
$$-17!.$$

例6. 求完全由n个布尔变量确定的布尔函数的个数。

在着手解决这个问题之前，先从一个$n=2$的布尔函数入手。两个自变量x_1、x_2共有$2^2=4$种状态：00,01,10,11。有$2^4=16$种不同函数，其真值表为表3-3-1。

从上表可得：$f(x_1,x_2)$的真值表和$2^2=4$位的2进制数相对应。不过其中有的可能与某一变量无关；比如f_3实际上是x_1的函数，与x_2无关；f_5则只是x_2的函数，与x_1无关。如$f_{10}=\bar{x}_2, f_{12}=\bar{x}_1$，而$f_{15}=1, f_{16}=0$和$x_1$、$x_2$都无直接关系。上面的讨论可以推广到$n$个变量的布尔函数。设$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$中$x_i$不出现的布尔函数类为$A_i$，$i=1,2,\cdots,n$.

由于n个布尔变量$x_1,x_2,\cdots,x_n$的不同的真值表数目与2^n位2进制数数目相同，故为2^{2^n}个。根据容斥原理满足问题要求的函数数目为

$$|\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap\cdots\cap\bar{A}_n|=2^{2^n}-C(n,1)2^{2^{n-1}}+C(n,2)2^{2^{n-2}}$$
$$-\cdots+(-1)^kC(n,k)2^{2^{n-k}}+\cdots+(-1)^nC(n,n)2.$$

$n=2$ 得 $|\bar{A}_1\cap\bar{A}_2|=2^{2^2}-C(2,1)2^2+C(2,2)2=16-8+2=10$.

表 3-3-1

x_1	x_2	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0
0	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0
1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0
1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
$f=$		$x_1\wedge x_2$	$x_1\wedge\bar{x}_2$	x_1	$\bar{x}_1\wedge x_2$	x_2	$(\bar{x}_1\vee\bar{x}_2)\wedge(x_1\vee x_2)$	$x_1\vee x_2$	$\bar{x}_1\wedge\bar{x}_2$	$(\bar{x}_1\vee x_2)\wedge(x_1\vee\bar{x}_2)$	$\bar{x}_2$	$x_1\vee\bar{x}_2$	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_1\vee x_2$	$\bar{x}_1\vee\bar{x}_2$	1	0

例 7. 欧拉函数

欧拉函数 $\varphi(n)$ 是求小于 n 且与 n 互素的数的个数。

若 n 分解成素数的乘积

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}.$$

设 1 到 n 的 n 个数中为 p_i 倍数的集合为 $A_i, i = 1, 2 \cdots, k$，则

$$|A_i| = n/p_i, i = 1, 2, \cdots, k.$$

$$|A_i \cap A_j| = \frac{n}{p_i p_j}, i, j = 1, 2, \cdots, k, i \neq j.$$

$$\cdots\cdots$$

$$\begin{aligned}\varphi(n) &= |\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \cdots \cap \overline{A}_k| \\ &= n - \left(\frac{n}{p_1} + \frac{n}{p_2} + \cdots + \frac{n}{p_k}\right) + \left(\frac{n}{p_1 p_2} + \frac{n}{p_1 p_3}\right. \\ &\quad \left. + \cdots + \frac{n}{p_{k-1} p_k}\right) - \cdots \pm \frac{n}{p_1 p_2 \cdots p_k} \\ &= n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).\end{aligned}$$

例如 $n = 60 = 2^2 \times 3 \times 5$，则

$$\begin{aligned}\varphi(60) &= 60\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right) \\ &= 60 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = 16.\end{aligned}$$

即比 60 小且与 60 无公因子的数有16个：7，11，13，17，19，23，29，31，37，41，43，47，49，53，59，此外尚有一个 1。

§4 错排问题

在第 2 章 §9 利用递推关系讨论过错排问题，在这一节利用容斥原理可以轻而易举地得出同一公式. n 个元素依次给以标号 1，

$2,\cdots,n$. n 个元素的全排列中，求每个元素都不在自己原来位置上的排列数。

设 A_i 为数 i 在第 i 位上的全体排列，$i=1,2,\cdots,n$。因数字 i 不动，故

$$|A_i|=(n-1)!,\ i=1,2,\cdots,n.$$

同理

$$|A_i\cap A_j|=(n-2)!,\ i,j=1,2,\cdots,n,i\neq j.$$

$\cdots\cdots$.

每个元素都不在原来位置上的排列数为

$$\begin{aligned}|\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\cdots\cap\overline{A}_n| &= n!-C(n,1)(n-1)!\\ &\quad +C(n,2)(n-2)!-\cdots\pm C(n,n)1!\\ &= n!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\cdots\pm\frac{1}{n!}\right).\end{aligned}$$

例 1. 数 1,2,3,…,9 的全排列中，求偶数在原来位置上，其余都不在原来位置上的错排数目。

实际上是 1,3,5,7,9 五个数的错排问题，总数为

$$\begin{aligned}&5!-C(5,1)4!+C(5,2)3!-C(5,3)2!+C(5,4)1!\\ &-C(5,5)=120\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{24}-\frac{1}{120}\right)=60\\ &-20+5-1=44.\end{aligned}$$

例 2. 在 8 个字母 A,B,C,D,E,F,G,H 的全排列中，求使 A,C,E,G 四个字母不在原来位置上的错排数目。

8 个字母的全排列中令 A_1,A_2,A_3,A_4 分别表 A,C,E,G 在原来位置上的排列，则

$$\begin{aligned}|\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\overline{A}_3\cap\overline{A}_4| &= 8!-C(4,1)7!+C(4,2)6!\\ &\quad -C(4,3)5!+C(4,4)4!=40320-20160+4320\\ &\quad -480+24=24024.\end{aligned}$$

例 3. 求 8 个字母A,B,C,D,E,F,G,H的全排列中只有 4 个

元素不在原来位置上的排列数。

8个字母中只有4个不在原来的位置上，其余4个字母保持不动，相当于4个元素的错排，其数目为

$$4!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}\right)$$
$$=24\left(1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{24}\right)$$
$$=12-4+1=9.$$

故8个字母的全排列中有4个不在原来位置上的排列数应为

$$C(8,4)\cdot 9=\frac{8!}{4!4!}\cdot 9=\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{4\cdot 2}\cdot 3$$
$$=7\cdot 6\cdot 5\cdot 3=210\cdot 3=630.$$

§5 棋盘多项式与有限制排列

1. 有限制排列

错排问题就是一种有限制条件的排列，下面的一些关于排列的例子也是有限制条件的。这一节里将介绍一种所谓棋盘多项式的办法，它是求解这类问题的一种方法。

例. 4个 x，3个 y，2个 z 的全排列中，求不出现 $xxxx$、yyy、zz 图象的排列数。

9个字母的全排列中，所有出现 $xxxx$ 图象的排列记为 A_1，出现 yyy 图象的排列记为 A_2，出现 zz 图象的排列记为 A_3。

$xxxx$ 作为一个单元出现进行排列，考虑到 y 重复3次，z 重复2次，故

$$|A_1|=\frac{6!}{3!2!}.$$

类似的理由 $|A_2|=\frac{7!}{4!2!}$，$|A_3|=\frac{8!}{4!3!}$.

$$|A_1\cap A_2|=\frac{4!}{2!},\ |A_1\cap A_3|=\frac{5!}{3!},\ |A_2\cap A_3|=\frac{6!}{4!}.$$

$$|A_1\cap A_2\cap A_3|=3!$$

4 个 x,3 个 y,2 个 z 的全排列中不同的排列数为 $\frac{9!}{4!3!2!}$.

$$
\begin{aligned}
|\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap\bar{A}_3| &= \frac{9!}{4!3!2!}-|A_1|-|A_2|-|A_3|+|A_1\cap A_2| \\
&\quad +|A_1\cap A_3|+|A_2\cap A_3|-|A_1\cap A_2\cap A_3| \\
&= \frac{9!}{4!3!2!}-\left(\frac{6!}{3!2!}+\frac{7!}{4!2!}+\frac{8!}{4!3!}\right) \\
&\quad +\left(\frac{4!}{2!}+\frac{5!}{3!}+\frac{6!}{4!}\right)-3!.
\end{aligned}
$$

2. 棋盘多项式

n 个元素的某一排列可以看作是 n 个棋子在 $n\times n$ 的棋盘上的一种布局。当一个棋子置于棋盘的某一格子时，则这一格子所在的行和列都不能再布任何棋子。例如图 3-5-1 的布局是第 1 行的棋子在第 4 列，第 2 行的棋子在第 1 列，第 3 行的棋在第 3 列，第 4 行的棋子在第 5 列，第 5 行的棋子在第 2 列。故图 3-5-1 的布局对应一排列 41352。

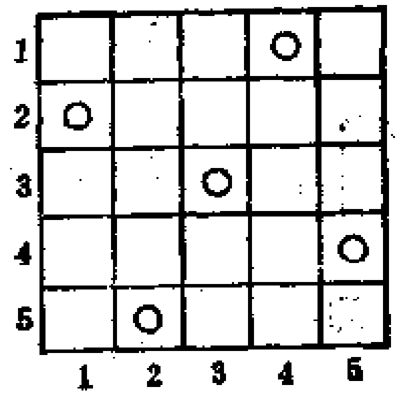


图 3-5-1

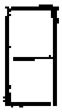
棋盘的每一个布局每行每列有一个且只有一个棋子。

可以把棋盘 C 推广到任意形状。

令 $r_k(C)$ 表示 k 只棋子布到棋盘 C 的不同方案数，规则是当一只棋子布到棋盘的某一格时，则这个格子所在的行和列上的其

它格子再不允许布上别的棋子。

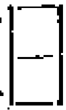
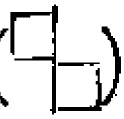
例如对于棋盘

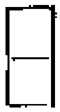
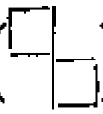


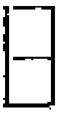
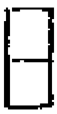
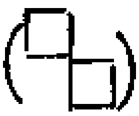
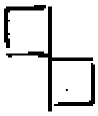
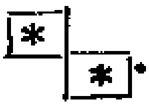
一个棋子有两种布局方案：



但不存在两个棋子的布局，故

$r_1(\square)=1$，$r_1=$ () $=2$，r_1() $=2$，

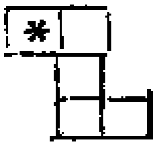
r_2() $=0$，r_2() $=1$。

为了形象化起见，括号（ ）里的图象便是棋盘的形状。比如 r_2() $=0$，表示在形如  的棋盘布两个棋子是不可能的。r_2() $=1$ 表示在形如  的棋盘上布两个棋子的方案是唯一的，即 。引入一个多项式

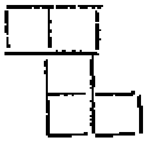
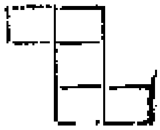
$$R(C)=\sum_{k=0}^{n} r_k(C)x^k, \tag{3-5-1}$$

称之为棋盘 C 的棋盘多项式。

设 $C_{(i)}$ 为在棋盘 C 中的某一格子所在的行和列被排除掉以后，所余的部分。$C_{(e)}$ 是从 C 中去掉该格子后的棋盘。例如对于棋盘



关于打有 * 号的格子，有 $C_{(i)}$ 和 $C_{(e)}$ 如下：

$C_{(i)}$: 　　$C_{(e)}$: 

虚线表从原图中去掉的部分。

显然有

$$r_k(C) = r_{k-1}(C_{(i)}) + r_k(C_{(e)}). \qquad (3\text{-}5\text{-}2)$$

就某一格子而言，无非两种可能，一是对该格子布下了棋子，一是不布棋子，所有的布局依此可分两类。 右端第一项 $r_{k-1}(C_{(i)})$ 表示对某格下了一个棋子后，剩下的 $k-1$ 个棋子布到 $C_{(i)}$ 棋盘上的方案数。

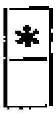
$r_k(C_{(e)})$ 表示某格子不布棋子，则 k 个棋子布到棋盘 $C_{(e)}$ 上的方案数。根据加法法则，(3-5-2)等号右端等于左端。

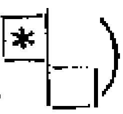
根据(3-5-2)有

$$R(C) = xR(C_{(i)}) + R(C_{(e)}). \qquad (2\text{-}5\text{-}3)$$

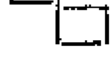
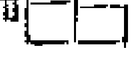
例如

$R(□) = 1 + x;$

$R\Bigg($  $\Bigg) = xR(\quad) + R(□) = x + (1 + x) = 1 + 2x;$

$R\Bigg($  $\Bigg) = xR(□) + R(□) = x(1 + x) + 1 + x$

$= 1 + 2x + x^2.$

假若棋盘 C 是由互相分离的两部分 C_1、C_2 组成，这里所说的 C_1 和 C_2 两棋盘互相分离，指的是同行或同列中没有属于 C_1 和 C_2 的两种格子，例如  便是，而  则不是。对于由 C_1 和 C_2

两个互相分离的棋盘组成的棋盘C有

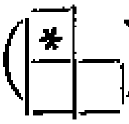
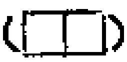
$$r_k(C)=\sum_{i=0}^{k} r_i(C_1)r_{k-i}(C_2),$$

$$R(C)=\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{k} r_i(C_1)r_{k-i}(C_2)\right)x^k$$

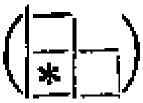
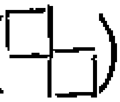
$$=\left(\sum_{i=0}^{n} r_i(C_1)x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{n} r_j(C_2)x^j\right),$$

$$\therefore\qquad R(C)=R(C_1)R(C_2). \tag{3-5-4}$$

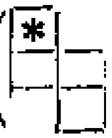
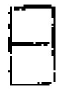
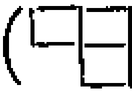
利用(3-5-4)和(3-5-3)，可以把一个比较复杂的棋盘逐步分解成相对比较简单的棋盘，从而得其棋盘多项式。例如

$R\Big($  $\Big)=xR($  $)+R($  $)=x(1+x)+(1+2x)$

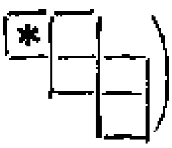
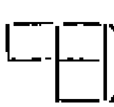
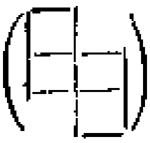
$=1+3x+x^2.$

$R\Big($  $\Big)=xR(\quad)+R\Big($  $\Big)=x+(1+2x+x^2)$

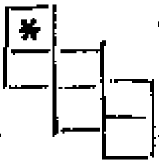
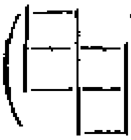
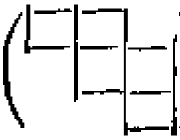
$=1+3x+x^2.$

$R\Big($  $\Big)=xR\Big($  $\Big)+R\Big($  $\Big)=x(1+2x)$

$+(1+3x+x^2)=1+4x+3x^2.$

$R\Big($  $\Big)=xR\Big($  $\Big)+R\Big($  $\Big)=x(1+3x+x^2)$

$+(1+4x+3x^2)=1+5x+6x^2+x^3.$

$R\Big($  $\Big)=xR\Big($  $\Big)+R\Big($  $\Big)=x(1+4x+3x^2)$

$+(1+5x+6x^2+x^3)$

$$= 1 + 6x + 10x^2 + 4x^3.$$

3. 有禁区的排列

图 3-5-2 有影线的格子表示是禁区，对于排列 $P = P_1P_2P_3P_4$，排列的第一个元素 P_1 不能取 3；第二个元素 P_2 不能取 1 和 4；第 3 个元素 P_3 不能取 2 和 4；第 4 个元素 P_4 不能取2。

定理：有禁区的排列数为

$$n! - r_1(n-1)! + r_2(n-2)! - \cdots \pm r_n, \qquad (3\text{-}5\text{-}5)$$

其中 r_i 是有 i 个棋子布置到禁区部分的方案数。

证明：令 $P_1P_2\cdots P_n$ 为 n 个棋子布人 $n \times n$ 棋盘所得到的排列，其中 P_i 为第 i 棋子落在棋盘的第 i 行的位置。A_i 为第 i 个棋子放入禁区，即 P_i 在禁区内事件。

一个棋子落入禁区方案数为 r_1，剩下的 $n-1$ 个棋子为无限制条件的排列，故至少有一个棋子进入禁区的方案数为 $r_1(n-1)!$。两个棋子落人禁区的方案数为 r_2，而其余 $n-2$ 个棋子为无限制条件的排列，故至少有两个棋子进人禁区的方案数为 $r_2(n-2)!$，依此类推。

依据容斥原理，布 n 个棋子无一落入禁区的方案数应为

$$|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \cdots \cap \bar{A}_n| = n! - r_1(n-1)! + r_2(n-2)! \cdots \pm r_n.$$

■

例1. 有 G, L, W, Y 四位工作人员，A, B, C, D 为四项任务，但 G 不能从事任务 B；L 不能从事 B, C 两项任务；W 不能作 C, D 工作；Y 不能从事任务 D。若要求每人从事各自力所能及的一项工作，试问有多少种不同方案？

每一种分配方案相当于图 3-5-3 的关于 A, B, C, D 的有禁区的排列。例如对于排列 $CDBA$，相当于 G 从事任务 C，L 从事 D，W 从事 B，Y 从事 A 的任务安排。

问题相当于求如图 3-5-3 所示的有禁区的棋盘，用四个棋子进行布局的方案数。

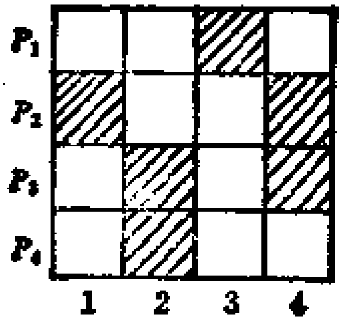


图 3-5-2

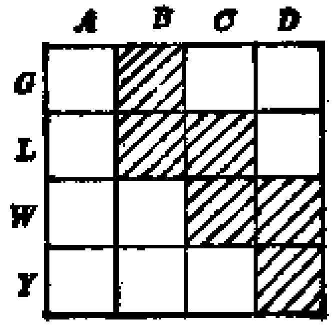


图 3-5-3

图 3-5-3 的禁区的棋盘多项式为

$$1 + 6x + 10x^2 + 4x^3.$$

即

$$r_1 = 6, \quad r_2 = 10, \quad r_3 = 4.$$

所求的方案数

$$N = 4! - 6 \times 3! + 10 \times 2! - 4$$
$$= 24 - 36 + 20 - 4 = 4.$$

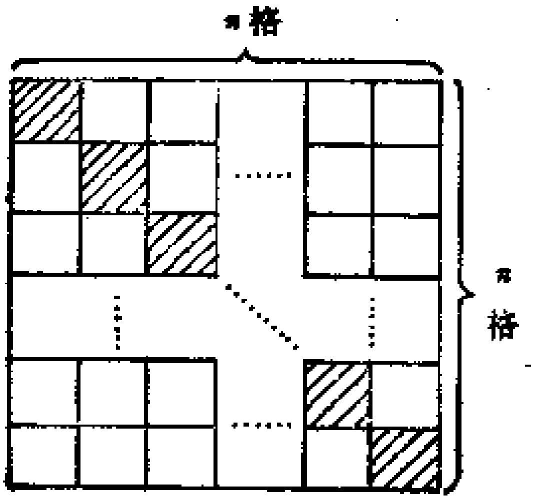


图 3-5-4

例 2. 错排问题

设图 3-5-4 是 $n\times n$ 棋盘，禁区都在对角线上。用 n 个棋子在上面布局。

所谓错排问题，实则为求如图 3-5-4 所示的有禁区的棋盘的布局方案数。

$$R\left(\underbrace{\begin{matrix}\Box & & & \\ & \Box & & \\ & & \ddots & \\ & & & \Box\end{matrix}}_{n}\right)=(1+x)^n=1+C(n,1)x$$

$$+C(n,2)x^2+\cdots+C(n,n)x^n.$$

$$\therefore\ r_1=C(n,1),$$

$$r_2=C(n,2),$$

$$\cdots\cdots$$

$$r_n=C(n,n).$$

错排问题的方案数为

$$n!-C(n,1)(n-1)!+C(n,2)(n-2)!$$

$$-\cdots\pm C(n,n).$$

这是用第三种方法导出错排公式。

§6 一 般 公 式

这一节把容斥原理推广到一般的场合．先举一例如下，比如 §2 的例中间单修一门数学的学生有多少？只修一门课程的学生又有多少？只修两门课程的学生又有多少？

单修一门数学的学生数目应为 $|M\cap\bar{P}\cap\bar{C}|$。

修一门课程的学生数目应为

$$|M\cap \bar{P}\cap \bar{C}| + |\bar{M}\cap P\cap \bar{C}| + |\bar{M}\cap \bar{P}\cap C|.$$

当然修两门课程的学生数目应为

$$|M\cap P\cap \bar{C}| + |M\cap \bar{P}\cap C| + |\bar{M}\cap P\cap C|.$$

关于性质 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的N个元素，令

$$p_1 = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|,$$

$$p_2 = |A_1\cap A_2| + |A_1\cap A_3| + \cdots + |A_{n-1}\cap A_n|,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$p_n = |A_1\cap A_2\cap \cdots \cap A_n|;$$

$$q_1 = |A_1\cap \bar{A}_2\cap \cdots \cap \bar{A}_n| + |\bar{A}_1\cap A_2\cap \bar{A}_3\cap \cdots \cap \bar{A}_n| + \cdots + |\bar{A}_1\cap \bar{A}_2\cap \cdots \cap \bar{A}_{n-1}\cap A_n|.$$

$$q_2 = |A_1\cap A_2\cap \bar{A}_3\cap \cdots \cap \bar{A}_n| + |A_1\cap \bar{A}_2\cap A_3\cap \bar{A}_4\cap \cdots \cap \bar{A}_n| + \cdots + |\bar{A}_1\cap \bar{A}_2\cap \cdots \cap \bar{A}_{n-2}\cap A_{n-1}\cap A_n|,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$q_n = |A_1\cap A_2\cap \cdots \cap A_n|.$$

显然 q_k 表示正好具有 k 种性质的元素个数．下面的公式给出计算 q_k 的公式：

$$q_k = p_k - C(k+1,1)p_{k+1} + C(k+2,2)p_{k+2} - \cdots \pm C(n,n-k)p_n,$$

$$k = 0,1,2,\cdots,n. \tag{3-6-1}$$

在图 3-6-1 中，把$A\cap B$和$A\cap C$看作是A的两个子集，在集合A内运用容斥原理，并考虑到

$$\overline{A\cap B} = \bar{A}\cup \bar{B},\ A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C).$$

故有

$$A\cap(\overline{A\cap B}) = A\cap(\bar{A}\cup \bar{B}) = (A\cap \bar{A})\cup(A\cap \bar{B}) = (A\cap \bar{B}),$$

$$A\cap(\overline{A\cap C}) = A\cap(\bar{A}\cup \bar{C}) = (A\cap \bar{A})\cup(A\cap \bar{C}) = (A\cap \bar{C}),$$

$$(A\cap \bar{B})\cap(A\cap \bar{C}) = A\cap \bar{B}\cap \bar{C}.$$

不难得到 $n=3$ 时有

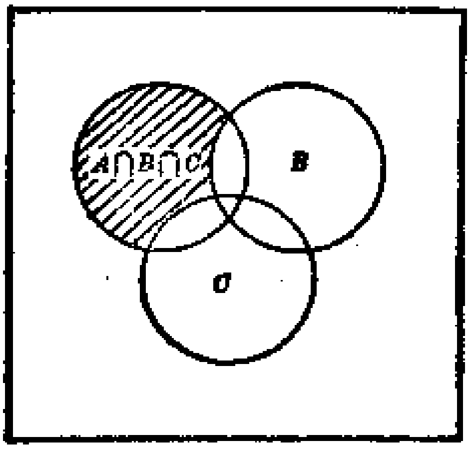


图 3-6-1

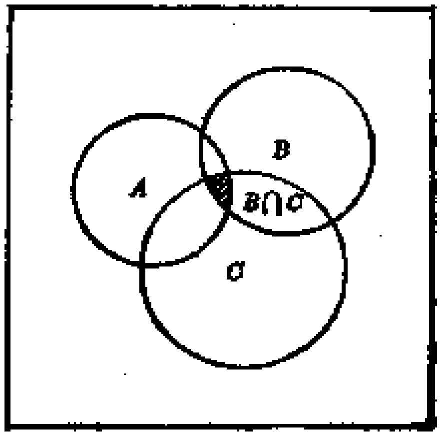


图 3-6-2

$$|A\cap\bar{B}\cap\bar{C}|=|A|-|A\cap B|-|A\cap C|+|A\cap B\cap C|,$$
$$|\bar{A}\cap B\cap\bar{C}|=|B|-|A\cap B|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|,$$
$$|\bar{A}\cap\bar{B}\cap C|=|C|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|.$$

(3-6-2)

类似理由$A\cap B\cap C$看作是$B\cap C$的子集，而且

$$(B\cap C)\cap(\overline{A\cap B\cap C})=(B\cap C)\cap(\bar{A}\cup(\overline{B\cap C}))$$
$$=(\bar{A}\cap(B\cap C))\cup((B\cap C)\cap(\overline{B\cap C}))$$
$$=\bar{A}\cap B\cap C.$$

图 3-6-2 中影线部分是 $A\cap B\cap C$，作为$B\cap C$的子集，利用容斥原理可得

$$|\bar{A}\cap B\cap C|=|B\cap C|-|A\cap B\cap C|,$$
$$|A\cap\bar{B}\cap C|=|A\cap C|-|A\cap B\cap C|, \qquad (3\text{-}6\text{-}3)$$
$$|A\cap B\cap\bar{C}|=|A\cap B|-|A\cap B\cap C|.$$

由(3-6-2)可得

$$|A\cap\bar{B}\cap\bar{C}|+|\bar{A}\cap B\cap\bar{C}|+|\bar{A}\cap\bar{B}\cap C|$$
$$=|A|-|A\cap B|-|A\cap C|+|A\cap B\cap C|$$
$$+|B|-|A\cap B|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$$
$$+|C|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$$

$$= (|A| + |B| + |C|) - 2(|A\cap B| + |A\cap C| + |B\cap C|) + 3|A\cap B\cap C|.$$

即
$$q_1 = p_1 - 2p_2 + 3p_3 \tag{3-6-4}$$

(3-6-4)正好是(3-6-1)中 $k=1$, $m=3$ 的结果(见图 3-6-3)。从(3-6-3)可得

$$\begin{aligned} q_2 &= |\bar{A}\cap B\cap C| + |A\cap \bar{B}\cap C| + |A\cap B\cap \bar{C}| \\ &= |B\cap C| + |A\cap C| + |A\cap B| - 3|A\cap B\cap C| \\ &= p_2 - 3p_3. \end{aligned} \tag{3-6-5}$$

(3-6-5)正好是(3-6-1)中令 $k=2$, $n=3$ 所得的结果。

$$\left.\begin{aligned} |A\cap \bar{B}\cap \bar{C}\cap \bar{D}| &= |A| - |A\cap B| - |A\cap C| - |A\cap D| \\ &\quad + |A\cap B\cap C| + |A\cap B\cap D| + |A\cap C\cap D| \\ &\quad - |A\cap B\cap C\cap D|, \\ |\bar{A}\cap B\cap \bar{C}\cap \bar{D}| &= |B| - |A\cap B| - |B\cap C| - |B\cap D| \\ &\quad + |A\cap B\cap C| + |A\cap B\cap D| + |B\cap C\cap D| \\ &\quad - |A\cap B\cap C\cap D|, \\ |\bar{A}\cap \bar{B}\cap C\cap \bar{D}| &= |C| - |A\cap C| - |B\cap C| - |C\cap D| \\ &\quad + |A\cap B\cap C| + |A\cap C\cap D| + |B\cap C\cap D| \\ &\quad - |A\cap B\cap C\cap D|, \\ |\bar{A}\cap \bar{B}\cap \bar{C}\cap D| &= |D| - |A\cap D| - |B\cap D| - |C\cap D| \\ &\quad + |A\cap B\cap D| + |A\cap C\cap D| + |B\cap C\cap D| \\ &\quad - |A\cap B\cap C\cap D|. \end{aligned}\right\} \tag{3-6-6}$$

$$\begin{aligned} |A\cap B\cap \bar{C}\cap \bar{D}| &= |A\cap B| - |A\cap B\cap C| - |A\cap B\cap D| \\ &\quad + |A\cap B\cap C\cap D|, \\ |A\cap \bar{B}\cap C\cap \bar{D}| &= |A\cap C| - |A\cap B\cap C| - |A\cap C\cap D| \\ &\quad + |A\cap B\cap C\cap D|, \\ |A\cap \bar{B}\cap \bar{C}\cap D| &= |A\cap D| - |A\cap B\cap D| - |A\cap C\cap D| \\ &\quad + |A\cap B\cap C\cap D|, \end{aligned} \tag{3-6-7}$$

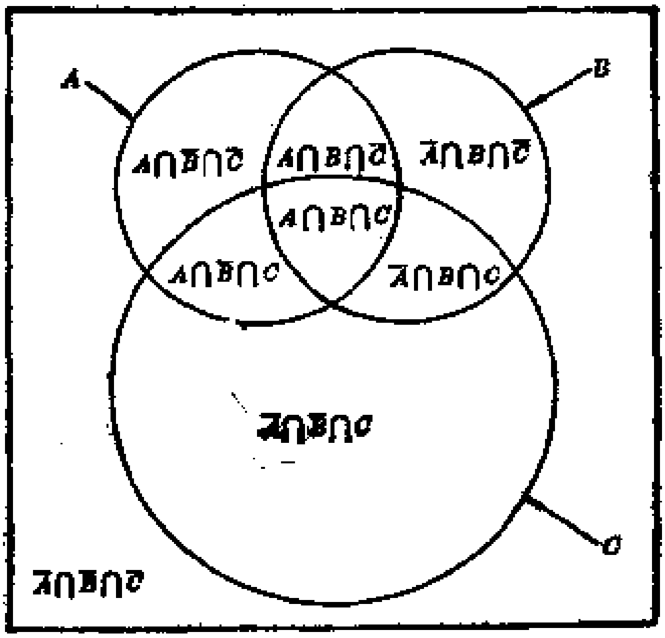


图 3-6-3

$$|\bar{A}\cap B\cap C\cap\bar{D}| = |B\cap C| - |A\cap B\cap C| - |B\cap C\cap D| + |A\cap B\cap C\cap D|,$$

$$|\bar{A}\cap B\cap\bar{C}\cap D| = |B\cap D| - |A\cap B\cap D| - |B\cap C\cap D| + |A\cap B\cap C\cap D|,$$

$$|\bar{A}\cap\bar{B}\cap C\cap D| = |C\cap D| - |A\cap C\cap D| - |B\cap C\cap D| + |A\cap B\cap C\cap D|.$$

由(3-6-6)得

$$\begin{aligned}
&|A\cap\bar{B}\cap\bar{C}\cap\bar{D}| + |\bar{A}\cap B\cap\bar{C}\cap\bar{D}| + |\bar{A}\cap\bar{B}\cap C\cap\bar{D}| \\
&\quad + |\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}\cap D| = |A| - |A\cap B| - |A\cap C| \\
&\quad - |A\cap D| + |A\cap B\cap C| + |A\cap B\cap D| + |A\cap C\cap D| \\
&\quad - |A\cap B\cap C\cap D| + |B| - |A\cap B| - |B\cap C| \\
&\quad - |B\cap D| + |A\cap B\cap C| + |A\cap B\cap D| + |B\cap C\cap D| \\
&\quad - |A\cap B\cap C\cap D| + |C| - |A\cap C| - |B\cap C| \\
&\quad - |C\cap D| + |A\cap B\cap C| + |A\cap C\cap D| + |B\cap C\cap D| \\
&\quad - |A\cap B\cap C\cap D| + |D| - |A\cap D| - |B\cap D|
\end{aligned}$$

$$- |C\cap D| + |A\cap B\cap D| + |A\cap C\cap D| + |B\cap C\cap D|$$
$$- |A\cap B\cap C\cap D| = (|A| + |B| + |C| + |D|)$$
$$- 2(|A\cap B| + |A\cap C| + |A\cap D| + |B\cap C|$$
$$+ |B\cap D| + |C\cap D|) + 3(|A\cap B\cap C| + |A\cap B\cap D|$$
$$+ |A\cap C\cap D| + |B\cap C\cap D|) - 4|A\cap B\cap C\cap D|.$$

即

$$q_1 = p_1 - 2p_2 + 3p_3 - 4p_4. \tag{3-6-8}$$

(3-6-8)正是(3-6-1)中 $k=1$，$n=4$ 的结果。

同样的理由从(3-6-7)可得

$$|A\cap B\cap \bar{C}\cap \bar{D}| + |A\cap \bar{B}\cap C\cap \bar{D}| + |A\cap \bar{B}\cap \bar{C}\cap D|$$
$$+ |\bar{A}\cap B\cap C\cap \bar{D}| + |\bar{A}\cap B\cap \bar{C}\cap D| + |\bar{A}\cap \bar{B}\cap C\cap D|$$
$$= |A\cap B| - |A\cap B\cap C| - |A\cap B\cap D| + |A\cap B\cap C\cap D|$$
$$+ |A\cap C| - |A\cap B\cap C| - |A\cap C\cap D|$$
$$+ |A\cap B\cap C\cap D| + |A\cap D| - |A\cap B\cap D|$$
$$- |A\cap C\cap D| + |A\cap B\cap C\cap D| + |B\cap C|$$
$$- |A\cap B\cap C| - |B\cap C\cap D| + |A\cap B\cap C\cap D|$$
$$+ |B\cap D| - |A\cap B\cap D| - |B\cap C\cap D|$$
$$+ |A\cap B\cap C\cap D| + |C\cap D| - |A\cap C\cap D|$$
$$- |B\cap C\cap D| + |A\cap B\cap C\cap D|.$$

$$\therefore\ q_2 = |A\cap B\cap \bar{C}\cap \bar{D}| + |A\cap \bar{B}\cap C\cap D|$$
$$+ |A\cap \bar{B}\cap \bar{C}\cap D| + |\bar{A}\cap B\cap C\cap \bar{D}|$$
$$+ |\bar{A}\cap B\cap \bar{C}\cap D| + |\bar{A}\cap \bar{B}\cap C\cap D|$$
$$= |A\cap B| + |A\cap C| + |A\cap D| + |B\cap C|$$
$$+ |B\cap D| + |C\cap D| - 3(|A\cap B\cap C|$$
$$+ |A\cap B\cap D| + |A\cap C\cap D| + |B\cap C\cap D|)$$
$$+ 6|A\cap B\cap C\cap D|.$$

即

$$q_2 = p_2 - 3p_3 + 6p_4. \tag{3-6-9}$$

(3-6-9)是(3-6-1)令 $k=2$，$n=4$ 的结果。

下面证明(3-6-1)。

证明： 对N用数学归纳法。

设 $C(n,k)$ 表示 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的k元子集的集合。

$N=1$ 时，设此元素为 a_1，a_1 有m种性质，不妨设 $A_1=A_2=\cdots=A_m=\{a_1\}$，$A_{m+1}=A_{m+2}=\cdots=A_n=\phi$。显然 $m\leqslant n$，$p_j=C(m,j)$。

根据 q_k 的定义，等式(3-6-1)的左端

$$q_k=\begin{cases}1, & k=m,\\ 0, & k\neq m.\end{cases}$$

等式的右端

$$\begin{aligned}&\sum_{i=0}^{n-k}(-1)^iC(k+i,i)P_{k+i}\\ &=\sum_{i=0}^{n-k}(-1)^iC(k+i,k)C(m,k+i)\\ &=\sum_{i=0}^{n-k}(-1)^iC(m,k)C(m-k,i)\\ &=C(m,k)\sum_{i=0}^{n-k}(-1)^iC(m-k,i)\\ &=\begin{cases}1, & m=k,\\ 0, & m\neq k.\end{cases}\end{aligned}$$

两端相等。

假设对于 $k=N-1$ 等式(3-6-1)成立，即

$$q_k=\sum_{i=0}^{n-k}(-1)^iC(k+i,i)P_{k+i}.$$

对于 N，设相应的数为 q'_k，p'_j，新增元素为 a_N，a_N 有m种性质，$m\leqslant n$。不妨设 $|A'_1|=|A_1|+1$，$|A'_2|=|A_2|+1$，$\cdots$，

$|A'_m| = |A_m| + 1$, $|A'_{m+1}| = |A_{m+1}|$, $\cdots$, $|A'_n| = |A_n|$。即 a_N 有第 $1,2,\cdots,m$ 种性质。显然 $p'_j = p_j + C(m,j)$。

根据定义，等式左端

$$q'_k = \begin{cases} q_k + 1, & k = m, \\ q_k, & k \neq m. \end{cases}$$

等式右端

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i C(k+i,i) p'_{k+i} \\
&\quad = \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i C(k+i,i)[p_{k+i} + C(m,k+i)] \\
&\quad = \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i C(k+i,k) p_{k+i} \\
&\qquad\quad + \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i C(k+i,k) C(m,k+i) \\
&\quad = q_k + \sum_{i=0}^{m-k} (-1)^i C(m,k) C(m-k,i) \\
&\quad = \begin{cases} q_k + 1, & m = k \\ q_k, & m \neq k \end{cases}
\end{aligned}$$

等式成立。 ■

另证： 先考察在指定集合 A 内的容斥原理的形式。

$$\begin{aligned}
&|A \cap \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \cdots \cap \overline{A}_k| \\
&\quad = |A \cap \overline{(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k)}| \\
&\quad = |A| - |A \cap (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k)| \\
&\quad = |A| - \left| \bigcup_{i=1}^{k} (A \cap A_i) \right| \\
&\quad = |A| + \sum_{j=1}^{k} (-1)^j \sum_{I \in C(k,j)} \left| \bigcap_{i \in I} (A \cap A_i) \right|
\end{aligned} \tag{3-6-10}$$

根据定义，

$$q_k=\sum_{I\in C(n,k)}\left|\left(\bigcap_{i\in I}A_i\right)\cap\left(\bigcap_{j\notin I}\overline{A}_j\right)\right|,$$

其中表示 $k+s$ 个集合的交的势的总项数为

$$\binom{n}{k}\binom{n-k}{s},$$

每一项的重复度为

$$\binom{n}{k}\binom{n-k}{s}\Big/\binom{n}{k+s}=\binom{k+s}{s}.$$

符号为$(-1)^s$. 考虑到 p_{k+s} 的定义，有

$$q_k=\sum_{s=0}^{n-k}(-1)^s\binom{k+s}{s}p_{k+s}.$$ ■

若令 $p_0=N, q_0=|\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\cdots\cap\overline{A}_n|$，则(3-6-1)就是原来的容斥原理.

例：某学校有 12 位教师，已知教数学课的教师有 8 位，教物理的教师有 6 位，教化学的教师有 5 位，其中有 5 位既教数学又教物理，有 4 位兼教数学和化学，兼教物理和化学的有 3 位；有 3 位教师教三门课，试问教数、理、化以外的课的教师有几位？只教一门课的教师有几位？正好教两门课的教师有几位？

令 12 位教师中凡教数学的教师属于集合 A_1，教物理的教师属于 A_2，教化学的教师属于 A_3.

$$\therefore\ |A_1|=8,|A_2|=6,|A_3|=5,$$
$$|A_1\cap A_2|=5,|A_1\cap A_3|=4,|A_2\cap A_3|=3,$$
$$|A_1\cap A_2\cap A_3|=3.$$

不教数学、物理和化学的教师数为

$$\begin{aligned}|\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\overline{A}_3|&=12-(|A_1|+|A_2|+|A_3|)+(|A_1\cap A_2|\\&\quad+|A_1\cap A_3|+|A_2\cap A_3|)-|A_1\cap A_2\cap A_3|\\&=12-(8+6+5)+(5+4+3)-3=12-19\end{aligned}$$

$+ 12 - 3 = 2.$

从(3-6-4)得只教数、理、化中一门课的教师数目为

$$q_1 = (|A_1| + |A_2| + |A_3|) - 2(|A_1\cap A_2| + |A_1\cap A_3| + |A_2\cap A_3|) + 3|A_1\cap A_2\cap A_3| = (8 + 6 + 5) - 2(5 + 4 + 3) + 3\times 3 = 4.$$

从(3-6-5)可得正好教数、理、化中两门课的教师数目为

$$q_2 = p_2 - 3p_3 = (|A_1\cap A_2| + |A_1\cap A_3| + |A_2\cap A_3|) - 3|A_1\cap A_2\cap A_3| = 5 + 4 + 3 - 9 = 3.$$

§7 Möbius 反演

每一个大于1的整数 n 可以唯一地分解成素数幂的乘积，设

$$n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k},$$

其 $p_1,p_2,\cdots,p_k$ 是不同的素数，$\alpha_i\geqslant 1$，$i=1,2,\cdots,k$. 定义

$$\mu(n) = \begin{cases}1, & \text{如果 } n = 1,\\ 0, & \text{如果存在 } i\text{，使 } \alpha_i > 1,\\ (-1)^k, & \text{如果 } \alpha_i = 1,\ i = 1,2,\cdots,k.\end{cases}$$

例如 $30 = 2\cdot3\cdot5, 121 = 11^2$.

$$\mu(30) = (-1)^3 = -1,\ \mu(121) = 0.$$

可利用容斥原理证明下面的定理.

定理 1. 对于任意正整数 n，有

$$\sum_{d|n}\mu(d) = \begin{cases}1, & \text{如果 } n = 1,\\ 0, & \text{如果 } n > 1.\end{cases} \tag{3-7-1}$$

证. $n = 1$，命题成立. 如果 $n > 1$，

设 $n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}, n_1 = p_1p_2\cdots p_k$. $C(k,j)$ 为 $\{1,2,\cdots,k\}$ 的 j 元子集的集合.

$$\sum_{d|n}\mu(d) = \sum_{d|n_1}\mu(d) = \mu(1) + \sum_{j=1}^{k}\sum_{I\in C(k,j)}\mu\left(\prod_{i\in I}p_i\right)$$

$$= 1 + \sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j}(-1)^j = (1-1)^k = 0. \qquad \blacksquare$$

从定理 1 可推出下面关于欧拉函数 $\phi(n)$ 的一个公式：

$$\phi(n) = n\sum_{d|n}\frac{\mu(d)}{d}. \tag{3-7-2}$$

如果 $n=1$，等式显然成立。

如果 $n>1$，设 $n=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_k^{a_k}$，$n_1=p_1p_2\cdots p_k$。

$$\begin{aligned}
n\sum_{d|n}\frac{\mu(d)}{d} &= n\sum_{d|n_1}\frac{\mu(d)}{d}\\
&= n\left\{1+\sum_{j=1}^{k}(-1)^j\sum_{I\in C(k,j)}\left(\prod_{i\in I}p_i\right)^{-1}\right\}\\
&= n\prod_{i=1}^{k}\left(1-\frac{1}{p_i}\right).\\
&= \phi(n).
\end{aligned}$$

定理 2.（Möbius 反演定理） 设 $f(n)$ 和 $g(n)$ 是定义在正整数集合上的两个函数。

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d) \tag{M_1}$$

的充要条件是

$$g(n) = \sum_{d|n}\mu(d)f\left(\frac{n}{d}\right). \tag{M_2}$$

称 $f(n)$ 是 $g(n)$ 的 Möbius 变换，$g(n)$ 是 $f(n)$ 的 Möbius 逆变换。

证明： 设 (M_1) 成立，有

$$f\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d_1|\frac{n}{d}} g(d_1).$$

因为 $d_1\left|\frac{n}{d}\right.$，所以存在 m，使得 $dd_1m=n$ 从而 $d\left|\frac{n}{d_1}\right.$。将上式

代入（M_2）的右端，有

$$\sum_{d|n}\mu(d)f\left(\frac{n}{d}\right)=\sum_{d|n}\mu(d)\sum_{d_1|\frac{n}{d}}g(d_1)$$

$$=\sum_{d|n}\sum_{d_1|\frac{n}{d}}\mu(d)g(d_1)$$

$$=\sum_{d_1|n}\sum_{d|\frac{n}{d_1}}\mu(d)g(d_1)=\sum_{d_1|n}g(d_1)\sum_{d|\frac{n}{d_1}}\mu(d).$$

根据定理 1，

$$\sum_{d|\frac{n}{d_1}}\mu(d)=\begin{cases}1, & n=d_1,\\ 0, & n>d_1.\end{cases}$$

因此，

$$\sum_{d_1|n}g(d_1)\sum_{d|\frac{n}{d_1}}\mu(d)=g(n).$$

即（M_1）成立。

反之，设（M_2）成立。有

$$g\left(\frac{n}{d}\right)=\sum_{d_1|\frac{n}{d}}\mu(d_1)f\left(\frac{n}{dd_1}\right)=\sum_{d_1|\frac{n}{d}}\mu\left(\frac{n}{dd_1}\right)f(d_1).$$

以此代入（M_1）的右端，得

$$\sum_{d|n}g(d)=\sum_{d|n}g\left(\frac{n}{d}\right)=\sum_{d|n}\sum_{d_1|\frac{n}{d}}\mu\left(\frac{n}{dd_1}\right)f(d_1)$$

$$=\sum_{d_1|n}\sum_{d|\frac{n}{d_1}}\mu\left(\frac{n}{dd_1}\right)f(d_1)$$

$$=\sum_{d_1|n}f(d_1)\sum_{d|\frac{n}{d_1}}\mu\left(\frac{n}{dd_1}\right)=f(n)$$

■

例 1. 因为 $\phi(n)=n\sum_{d|n}\frac{\mu(d)}{d}=\sum_{d|n}\mu(d)\left(\frac{n}{d}\right)$，根据定理

2，所以

$$n=\sum_{d|n}\phi(d)=\sum_{d|n}\phi\left(\frac{n}{d}\right).$$

例 2. 圆排列问题

设 $a_1a_2\cdots a_n$ 是一沿着圆周排列的序列．即它和 $a_2a_3\cdots a_na_1,\cdots,a_na_1a_2\cdots a_{n-1}$ 看做是相同的。这样的排列称为圆排列．为了加以区别，在必要时把原先的排列称为线排列．一个圆排列在 n 个位置断开形成的 n 个线排列在元素可重复的情况下，未必都不相同。例如，$d|n$ 时由不重的 $a_1a_2\cdots a_d$ 重复 n/d 次构成的圆排列

$$\underbrace{(a_1a_2\cdots a_d)(a_1a_2\cdots a_d)\cdots(a_1a_2\cdots a_d)}_{n/d\text{ 组}}$$

只能形成 d 个不同的线排列．如果一个圆排列可由一个长度为 k 的线排列重复若干次形成，则这样的 k 中最小者称为该圆排列的周期．一个圆排列中元素的个数（重复出现的元素按其重复出现的次数计）称为它的长度。

设由集合 $\{1,2,\cdots,m\}$ 中元素形成的长度与周期都是 d 的圆排列的个数为 $M(d)$，n 是给定的正整数．

如果 $d|n$，每个长度与周期都是 d 的圆排列可在 d 个位置上断开，重复 n/d 次形成 d 个长度为 n 的可重排列。因此有

$$\sum_{d|n}dM(d)=m^n. \tag{3-7-3}$$

根据定理 2，

$$nM(n)=\sum_{d|n}\mu(d)m^{\frac{n}{d}}, \tag{3-7-4}$$

$$M(n)=\frac{1}{n}\sum_{d|n}\mu(d)m^{\frac{n}{d}}.$$

设长度为 n 的圆排列个数为 $T(n)$，则

$$T(n)=\sum_{d|n}M(d).$$

§8 鸽巢原理

1. 鸽巢原理

鸽巢原理是组合数学里最简单也是最基本的原理，也有的叫做抽屉原理，即“若有 n 个鸽子巢，$n+1$ 只鸽子，则至少有一个鸽子巢里至少有两只鸽子”。

但从这样一个看来是显而易见的原理出发，可以导出许多组合数学中的并不那么显而易见的有趣结论.下面先举几个例子，通过例子说明利用鸽巢原理的一般步骤，从不同的灵活性中总结出带规律性的东西来。

例 1. 一年 365 天，今有 366 个人，则其中至少有两个人生日相同。

例 2. 抽屉里有 10 双手套，从中取 11 只出来，其中至少有两只是完整配对的。

例 3. 某次会议有 n 位代表参加，每一位代表至少认识其余 $n-1$ 位中的一位，则 n 位代表中，至少有两位认识的人数相等。

n 位代表认识的人数有 $1,2,\cdots,n-1$，根据鸽巢原理可知至少有 2 人认识的人数相等.

例 4. 从 1 到 $2n$ 的正整数中任取 $n+1$ 个，则这 $n+1$ 个数中至少有一对数，其中一个数是另一个数的倍数。

证. 设所取 $n+1$ 个数是

$$a_1,a_2,\cdots,a_n,a_{n+1}.$$

对 $a_1,a_2,\cdots,a_n,a_{n+1}$ 序列中的每一个数去掉一切 2 的因子，直至剩下一个奇数为止。例如 $68=2\times 34=2^2\times 17$，去掉 2 的因子 2^2，留下奇数 17。结果得由奇数组成的序列

$$r_1, r_2, \cdots, r_{n+1}, \tag{R}$$

1 到 $2n$ 中只有 n 个奇数，故序列（R）中至少有两个是相同的。设为 $r_i = r_j = r$。对应的有

$$a_i = 2^{\alpha_i} r, \quad a_j = 2^{\alpha_j} r.$$

若 $a_i > a_j$，则 a_i 是 a_j 的倍数。

例 5. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 是正整数的序列，则至少存在整数 k 和 $l, 1 \leqslant k < l \leqslant m$，使得和

$$a_k + a_{k+1} + \cdots + a_l$$

是 m 的倍数。

证： 构造一序列 $s_1 = a_1$，$s_2 = a_1 + a_2$，$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$，$\cdots$，$s_m = a_1 + a_2 + \cdots + a_m$。则

$$s_1 < s_2 < \cdots < s_m, \tag{3-8-1}$$

有两种可能：

（a）若有一个 s_h 是 m 的倍数，则定理已得证。

（b）设序列(3-8-1)中没有任何一个元素是 m 的倍数。

令 $$s_h \equiv r_h \bmod m,$$
$$h = 1, 2, \cdots, m.$$

假定(3-8-1)中所有的项都非 m 的倍数，故其中 r_1、r_2、$\cdots$、r_m 无一为 0，而且所有的 r_h 均小于 m。不超过 $m-1$ 的正整数只有 $m-1$ 个。根据鸽巢原理，其中至少存在一对 r_h、r_k，满足 $r_h = r_k$。即 s_h 和 s_k 满足

$$s_k \equiv s_h \quad \bmod m.$$

不妨设 $h > k$。

$$s_h = a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1} + \cdots + a_h,$$

$$-)\, s_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k,$$

$$s_h - s_k = a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_h \equiv 0 \bmod m$$

■

例 6. 设 a_1,a_2,a_3 为三个任意的整数，$b_1b_2b_3$ 为 a_1,a_2,a_3 的任一排列，则 a_1-b_1，a_2-b_2，a_3-b_3 中至少有一个是偶数。

证. 根据鸽巢原理 a_1,a_2,a_3 三个数中至少有两个数，或同是奇数，或同是偶数。不妨设这两个数是 a_1 和 a_2，而且是奇数. 则 a_1,a_2,a_3 中最多只有一个是偶数。故根据鸽巢原理 b_1,b_2 中至少有一个是奇数，而且和 a_1,a_2 中的一个相等。由于奇数与奇数之差是偶数，故 a_1-b_1,a_2-b_2 中至少有一个是偶数。若 a_1,a_2 两个数同是偶数，结果也是对的，因偶数与偶数之差仍然是偶数。

例 7. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_{100}$ 是由 1 和 2 组成的序列，已知从其中任意一个数开始的顺序 10 个数的和不超过 16. 即对于 $1\leqslant i\leqslant 91$，恒有

$$a_i+a_{i+1}+\cdots+a_{i+9}\leqslant 16.$$

则至少存在 h 和 $k,k>h$，使得

$$a_h+a_{h+1}+\cdots+a_k=39.$$

作序列 $s_1=a_1,s_2=a_1+a_2,\cdots,s_{100}=a_1+a_2+\cdots+a_{100}$. 由于每个 a_i 都是正的整数，故

$$s_1<s_2<\cdots<s_{100}. \tag{3-8-2}$$

而且

$$s_{100}=(a_1+a_2+\cdots+a_{10})+(a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{20})$$
$$+\cdots+(a_{91}+a_{92}+\cdots a_{100}).$$

故根据假定有

$$s_{100}\leqslant 10\times 16=160.$$

作序列

$$\underbrace{s_1,s_2,\cdots,s_{100},s_1+39,s_2+39,\cdots,s_{100}+39.}_{\text{共 200 项}} \tag{3-8-3}$$

最大的项 $s_{100}+39\leqslant 160+39=199$. 序列(3-8-3)共 200 项，为从 1 到 199 的整数. 根据鸽巢原理，其中至少有两项相等. 由于(3-8-2)成立，

$$\therefore s_1 + 39 < s_2 + 39 < s_3 + 39 < \cdots < s_{100} + 39.$$

故存在 s_h、s_k 满足关系

$$s_k = s_h + 39,$$

即只能是(3-8-3)的前 100 项中的某 s_k，和后 100 项中某 $s_h + 39$ 相等。

$$\therefore s_k - s_h = 39.$$

即

$$a_{h+1} + a_{h+2} + \cdots + a_k = 39.$$

2. 鸽巢原理推广

$m_1, m_2, \cdots, m_n$ 都是正整数，并有 $m_1 + m_2 + \cdots + m_n - n + 1$ 只鸽子住进 n 个鸽巢，则：第一个鸽巢至少有 m_1 只鸽子，或第二个鸽巢至少有 m_2 只鸽子，…，或第 n 个鸽巢至少有 m_n 只鸽子，至少其中之一必然成立。

前面一节的鸽巢原理是一特殊情形，即 $m_1 = m_2 = \cdots = m_n = 2$ 的结果，$m_1 + m_2 + \cdots + m_n - n + 1 = n + 1$。

如若不然，即第一个鸽巢的鸽子数少于 m_1 只，第二个鸽巢的鸽子数少于 m_2 只，…，第 n 个鸽巢的鸽子数少于 m_n 只，则鸽子总数不超过

$$(m_1 - 1) + (m_2 - 1) + \cdots + (m_n - 1)$$
$$= m_1 + m_2 + \cdots + m_n - n,$$

与假设鸽子数为 $m_1 + m_2 + \cdots + m_n - n + 1$ 相矛盾。

推论 1: m 只鸽子，n 个鸽子巢，则至少有一个鸽子巢里有不少于 $\left\lfloor \frac{m-1}{n} \right\rfloor + 1$ 只鸽子。

如若不然，鸽巢里最多有 $\left\lfloor \frac{m-1}{n} \right\rfloor$ 只鸽子，n 个鸽巢的鸽子数最多为 $n\left\lfloor \frac{m-1}{n} \right\rfloor \leqslant m - 1$，与假设矛盾。

推论 2：若取 $n(m-1)+1$ 个球放进 n 个盒子，则至少有 1 个盒子有 m 个球。

这推论是当 $m_1=m_2=\cdots=m_n=m$ 时的特殊情况。

推论 3：若 $m_1,m_2,\cdots,m_n$ 是 n 个正整数，而且

$$\frac{m_1+m_2+\cdots+m_n}{n}>r-1,$$

则 $m_1,m_2,\cdots,m_n$ 中至少有 1 个数不小于 r。

例 1. 设 $A=a_1a_2\cdots a_{20}$ 是由 10 个 0 和 10 个 1 组成的某一 20 位 2 进制数；$B=b_1b_2\cdots b_{20}$ 是任意的 20 位 2 进制数。现把 A、B 分别记入图 3-8-1 的（A），（B）两个 20 个格子，分别得（A）、（B）两种图象，并把两个 B 联接得 40 位的 2 进制数 $C=\underbrace{b_1b_2\cdots b_{20}}_{B}\ \underbrace{b_1b_2\cdots b_{20}}_{B}$，它的图象为（$C$）。

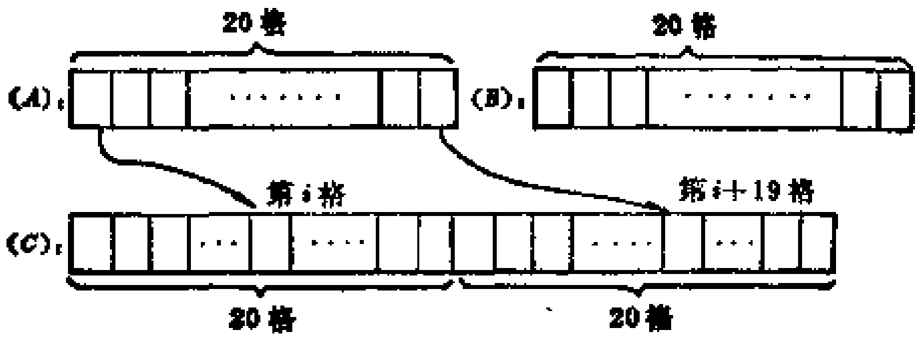


图 3-8-1

存在某一配合可以使得图象（C）上某相连的 20 格正好和图象（A）的 20 格中至少 10 位的对应数字相同。

例如图 3-8-1 中（A）的第 1 格对应于（C）中的第 i 格。令 $i=1,2,\cdots,20$. 在这个过程中图象（B）中每一格和（A）的每一格比较相同了 10 次. 相同的数字数目之和应是 $20\times10=200$. 平均每次有相同数字的格数应是 $\frac{200}{20}=10$。

根据鸽巢原理，至少有一次，其中相同数字的格数不少于10。

定理：若序列

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{n^2+1} \tag{S}$$

的 n^2+1 个元素是不相等的实数，则从 (S) 中至少可选出一组由 $n+1$ 个元素组成的或为单调增或为单调减的子序列。

在证明定理以前，先举一个例子以说明定理的意思，使之有感性的知识，再证明就不困难了。对于序列

$$5,3,16,10,15,14,9,11,6,7.$$

从中可以选出不相同的单调增子序列，例如

$$\{5,16\};\{5,10,15\};\{3,9,11\};\{3,6,7\};\cdots.$$

也可以从中选出单调减子序列。如

$$\{5,3\};\{16,10,9,6,\};\{16,15,14,11,7\};\cdots.$$

证1：

从序列 (S) 中的每一个元素 a_i 向后可选出若干个单调增子序列，其中有一个元素最多的单调增子序列，设其元素个数为 $l_i, i=1,2,\cdots,n^2+1$。于是得一序列

$$l_1, l_2, \cdots, l_{n^2+1}. \tag{L}$$

如若序列 (L) 中有一个元素 $l_k \geqslant n+1$，则已符合定理要求。如若不然，设不存在元素个数超过 n 的单调增子序列，即

$$0 < l_i \leqslant n, i=1,2,\cdots,n^2+1.$$

这相当于把 n^2+1 个球放到 n 个盒子里。由于 $m=n^2+1$，

$$\left\lfloor\frac{m-1}{n}\right\rfloor+1=\left\lfloor\frac{n^2+1-1}{n}\right\rfloor+1=n+1,$$

根据鸽巢原理存在 $n+1$ 个 $l_{k_1}, l_{k_2}, \cdots, l_{k_{n+1}}$，和 $l, 0<l\leqslant n$，使得 $l_{k_1}=l_{k_2}=\cdots=l_{k_{n+1}}=l$。不失一般性，不妨设 $k_1<k_2<\cdots<k_{n+1}$，由于所有 a_i 是不同实数，故对应的 $a_{k_1}, a_{k_2}, \cdots, a_{k_{n+1}}$ 必然满足

$$a_{k_1} > a_{k_2} > \cdots > a_{k_{n+1}}. \tag{A}$$

因如若不然，设 $k_i < k_j$，有 $a_{k_i} < a_{k_j}$，则可把元素 a_{k_i} 加到从 a_{k_j} 开始的长度为 l 的单调增序列的前面，构成从 a_{k_i} 开始的长度为 $l+1$ 的单调增序列，这和 l 是 a_{k_i} 的最长增序列的假设矛盾。

但序列（A）本身是一单调减子序列。这就证明了若不存在 $n+1$ 个元素的单调增子序列，便存在一有 $n+1$ 个元素的单调减子序列（A）。同样的办法可证，若(S)不存元素个数为 $n+1$ 的单调减子序列，则必然存在一元素个数为 $n+1$ 的单调增子序列。 ■

证 2：对于序列（S）中每一个元素 a_i 对应有一数偶 (l_i, m_i)，l_i 是从 a_i 开始向后选出的单调增子序列中元素个数最多的子序列长度，m_i 为从 a_i 开始向后选出的单调减子序列中元素个数最多的子序列长度。于是对应于序列（S）有

$$(l_1, m_1), (l_2, m_2), \cdots, (l_{n^2+1}, m_{n^2+1}), \tag{A_1}$$

其中

$$1 \leqslant l_i \leqslant n, 1 \leqslant m_i \leqslant n, i = 1, 2, \cdots, n^2+1. \tag{B_1}$$

满足条件（B_1）的数偶最多只有 n^2 个，根据鸽子巢原理，(A_1) 中至少有一对数偶 (l_i, m_i)，(l_j, m_j) 完全相同。

即 $\qquad (l_i, m_i) = (l_j, m_j)$，或 $l_i = l_j, m_i = m_j$。

由于序列（S）的元素为不相等的实数，不妨设 $i < j$。若 $a_i < a_j$ 则将导出 $l_i > l_j$，和 $l_i = l_j$ 相矛盾。若 $a_i > a_j$，则 $m_i > m_j$，和 $m_i = m_j$ 相矛盾。 ■

例。从 1 到 67 的正整数任意分成 4 部分，其中必有一部分至少有一个元素是某两个元素之差。

设从 1 到 67 的整数任意分成 4 部分分别为 p_1, p_2, p_3, p_4。若这 4 部分中无一具有问题所指的性质，即其中至少有一个元素是其中两个元素之差，结果导出矛盾，从而证明了问题的结论是正

确的。

①从 1 到 67 的整数中至少有

$$\left\lfloor\frac{67-1}{4}\right\rfloor+1=17$$

个元素设属于 p_1，并设这 17 个元素为

$$a_1<a_2<\cdots<a_{17}.$$

令 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_{17}\}$，如若 A 中存在一个元素是某两个元素之差，则满足问题的要求。否则令

$$b_1=a_2-a_1,b_2=a_3-a_1,\cdots,b_{16}=a_{17}-a_1.$$

令 $B=\{b_1,b_2,\cdots,b_{16}\}$。显然 $1\leqslant b_i<67$，即 B 的元素仍然是从 1 到 67 间的数。根据假定 $b_1,b_2,\cdots,b_{16}$ 中无一属于 p_1，否则与假定 A 中不存在一元素等于某二元素之差相矛盾。所以 B 的元素属于 p_2,p_3 或 p_4。

②和①的讨论相类似，B 中至少存在设属于 p_2 的

$$\left\lfloor\frac{16-1}{3}\right\rfloor+1=6$$

个元素，设为 $c_1<c_2<c_3<c_4<c_5<c_6$。令 $C=\{c_1,c_2,c_3,c_4,c_5,c_6\}$。根据假定 C 中没有一元素为某两个元素之差。令

$d_1=c_2-c_1,d_2=c_3-c_1,d_3=c_4-c_1,d_4=c_5-c_1,\ d_5=c_6-c_1.$

$D=\{d_1,d_2,d_3,d_4,d_5\}$，所有的 $d_i<67,i=1,2,3,4,5$。存在整数 l,m 使得

$$d_k=c_{k+1}-c_1=(a_l-a_1)-(a_m-a_1)=a_l-a_m.$$

故 D 的元素不属于 p_1，同时也不属于 p_2，只能属于 p_3,p_4。

③综上所述，D 中 5 个元素只能属于 p_3,p_4，故根据鸽子巢原理，至少存在

$$\left\lfloor\frac{5-1}{2}\right\rfloor+1=3$$

个元素设属于 p_3，设为 $f_1<f_2<f_3<67$。令 $F=\{f_1,f_2,f_3\}$。根

据假定F中不存在一元素为某二元素之差，令

$$g_1=f_2-f_1,\ g_2=f_3-f_1,\ G=\{g_1,g_2\}.$$

显然G的元素不属于 p_3，而且$1\leqslant g_1<g_2<67$。尚可证明G的元素

$$g_i=(c_p-c_1)-(c_q-c_1)=c_p-c_q=(a_l-a_1)$$
$$-(a_m-a_1)=a_l-a_m,$$
$$i=1,2.$$

这就证明 g_1 和 g_2 既不属于 p_1，也不属于 p_2。G 的元素不属于 p_1,p_2 和 p_3，故G的元素属于 p_4。

④但根据假定 $g_1\neq g_2-g_1$，令

$$h=g_2-g_1,$$

则h不属于 p_4，$1\leqslant h<67$，还可以证明h也不属于 p_1,p_2,p_3。即存在一整数 $1\leqslant h<67$，不属于 p_1,p_2,p_3,p_4 中任何一个，这与1到67间的整数任意分成四个部分的假设相矛盾。 ■

§9 Ramsey 问题

1. Ramsey 问题

Ramsey 问题的提法是这样的：六个人中至少存在三个人或

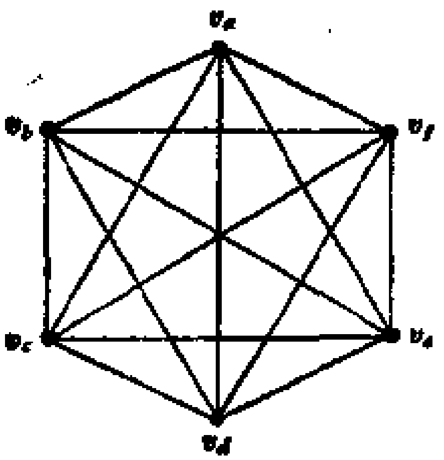


图 3-9-1

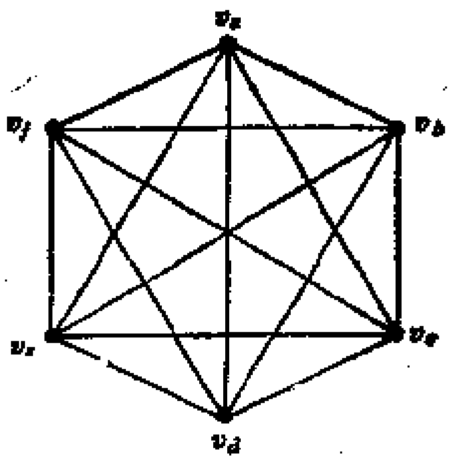


图 3-9-2

是互相认识，或是互相不认识。A,B,C,D,E,F 六个人分别用六个顶点 v_a,v_b,v_c,v_d,v_e,v_f 表示。过此六个顶点作完全图，见图3-9-1。互相认识的二人，对应顶点的连线着红色，比如A与B互相认识，则 (v_a,v_b) 边着红色。不相认识二人对应顶点联线着蓝色。

Ramsey 问题等价于证明这六个顶点的完全图的边，用红、蓝二色任意着色，必然至少存在一红色边三角形，或蓝色边三角形。

v_a 点和其他五个顶点相连有五条边，每条边或着以红色，或着以蓝色。依据鸽子巢原理其中至少有 $\left\lfloor\frac{5-1}{2}\right\rfloor+1=3$ 条边同色，不妨假定有三条边着以红色。三条边的另外三端点设为 v_l，v_m,v_n。这三端点间的联线或同色或不同色。若是前者，则已存在一同色三角形，或是红色或是蓝色，均满足 Ramsey 问题的结论。若是后者。依据鸽子巢原理至少有一条是红色，设为 (v_l,v_m)，则 $v_av_lv_m$ 构成一红色边三角形。Ramsey 问题证毕。

上面只不过利用图的形象而且直观的特点。对 Ramsey 问题还可以论证如下：

对于A以外的 5 人可分为 Friend 和 Strange 两个集合。

Friend ＝ 其余 5 人中与A互相认识的集合；

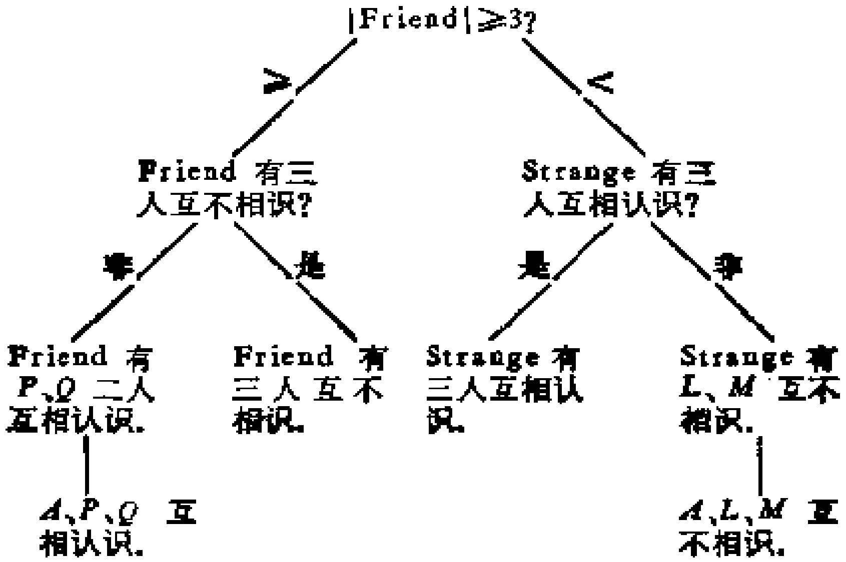
Strange ＝ 其余 5 人中与A互相不识的集合。

依据鸽子巢原理，Friend 和 Strange 中有一个集合至少有 3 个人，不妨假设是集合 Friend。

Friend 中三人 P,Q,R 若是彼此互相不识，则问题已得证明。否则有两个人互相认识，不妨设这两个人是 P,Q，则 A,P,Q 三人彼此认识。

若是集合 Strange 至少有三个人，可以同样讨论如下：若 Strange 有三人 L,M,N 彼此互相认识，则问题的条件已得到满足。否则设 L,M 互不相识，则 A,L,M 互不相识。

现在把推理过程形象地表示如下。



2. 若干推论

(a) 对六个顶点的完全图的边用红蓝二色任意着色，结果至少有两个同色的三角形。

六个顶点令之为 v_a,v_b,v_c,v_d,v_e,v_f。对六个顶点的完全图用红、蓝二色进行着色，至少有一个同色三角形，设 $v_av_bv_c$ 是红色边的三角形。

依据鸽巢原理，从 v_a 引出的五条边 $v_av_b,v_av_c,v_av_d,v_av_e,v_av_f$ 中至少有三条边是同色，其中 v_av_b,v_av_c 已假定着红色。

先讨论与 v_a 关联的边中有三条是蓝色边的情况。这三条蓝色边只能是 v_av_d,v_av_e,v_av_f。

这时，若 v_dv_e,v_dv_f,v_ev_f 中有一条是蓝色边，则将出现另一个同色(蓝色)三角形，或 $v_av_dv_e$，或 $v_av_ev_f$，或 $v_av_dv_f$。

否则 v_dv_e,v_dv_f,v_ev_f 都是红色边，则也出现另一个红色边三角形 $v_dv_ev_f$ (图 3-9-3)。

如若从 v_a 出发的边中至少有三条边是红色边。由于 v_av_b、v_av_c 已是红色边，故在剩下的 v_av_d,v_av_e,v_av_f 中至少有一条是红

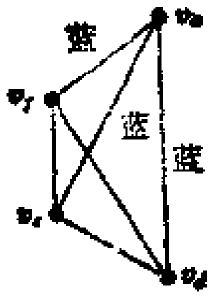


图 3-9-3

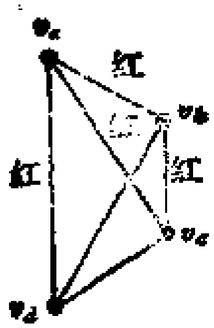


图 3-9-4

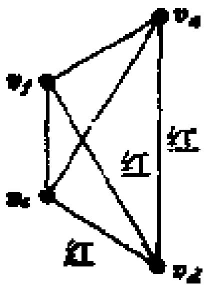


图 3-9-5

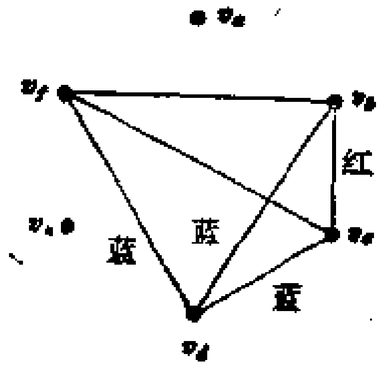


图 3-9-6

色边。不妨假定 $v_a v_d$ 是红色边. 只要 $v_d v_b$ 或 $v_d v_c$ 是红色边,则出现另一个同色的(红色)三角形 $v_a v_b v_d$ 或 $v_a v_c v_d$ (图 3-9-4)。

在过 v_a 点的三条边 $v_a v_b, v_a v_c, v_a v_d$ 都是红色边的前提下,若从 v_d 出发的 $v_d v_c$ 和 $v_d v_b$ 都是蓝色边,则余下的三条边 $v_d v_a$、$v_d v_e$、$v_d v_f$ 中又分几种情况讨论如下.

若 $v_d v_a, v_d v_e, v_d v_f$ 是红色边,即过 v_d 至少有三条红色边. 可见只要 $v_a v_e, v_a v_f, v_f v_e$ 中至少有一条是红色边,则三角形 $v_a v_d v_f$ 或 $v_a v_d v_e$, 或 $v_e v_d v_f$ 中至少有一个是红色边三角形。如若不然, $v_a v_e, v_a v_f, v_e v_f$ 都是蓝色边,则 $v_a v_e v_f$ 是蓝色边三角形。

若 v_d 点的五条边中至少有三条边着以蓝色,则 $v_d v_f, v_d v_e$ 中至少有一条边是蓝色边,例如 $v_d v_f$ 是蓝色边. 只要 $v_b v_f, v_c v_f$ 中有一条着以蓝色,便得另一个蓝色边三角形 $v_b v_d v_f$, 或 $v_c v_d v_f$。

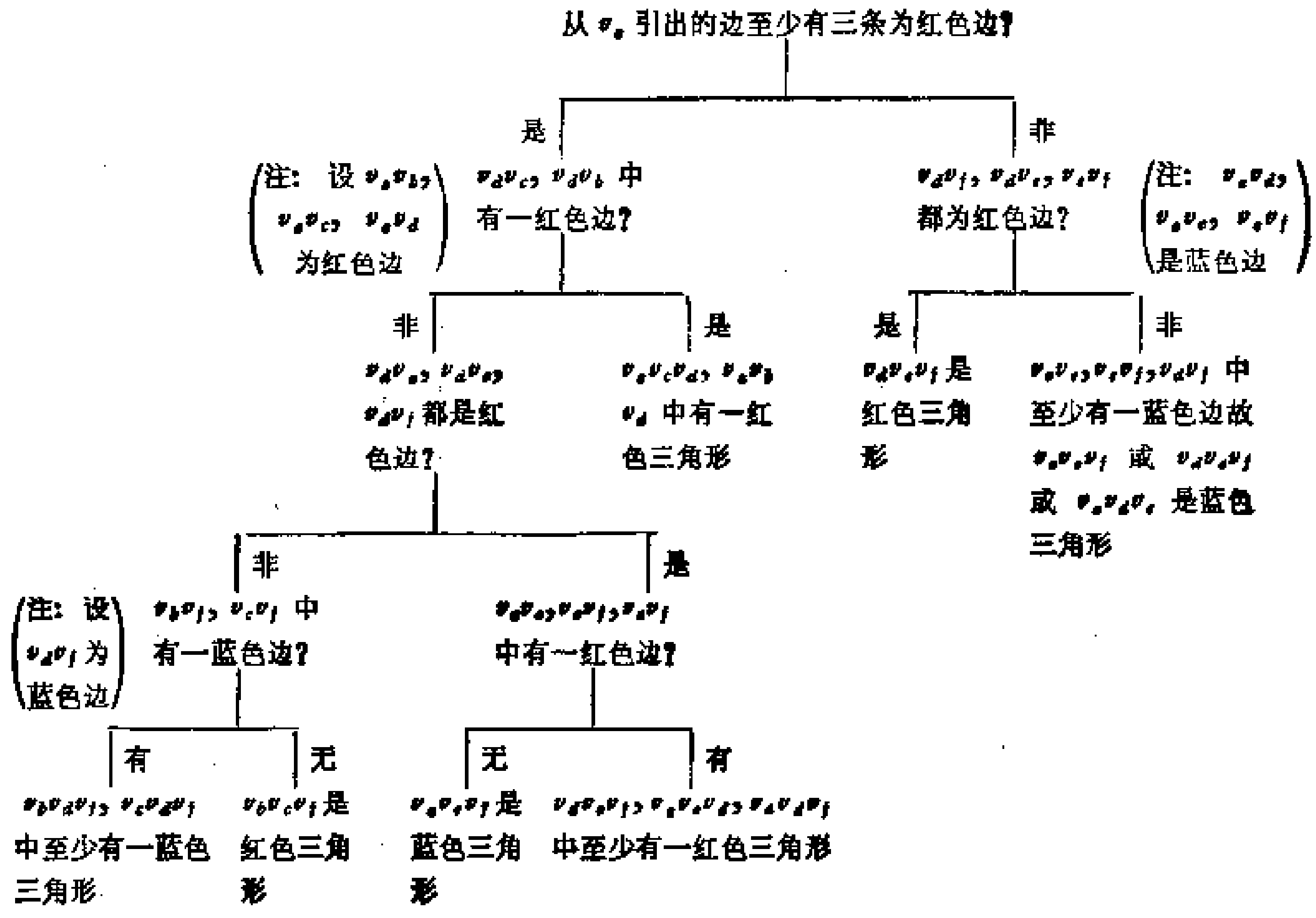

从 v_a 引出的边至少有三条为红色边?
是
非
(注: 设 v_av_b, v_av_c, v_av_d 为红色边)
v_dv_c, v_dv_b 中有一红色边?
v_dv_f, v_dv_e, v_ev_f 都为红色边?
(注: v_av_d, v_av_e, v_av_f 是蓝色边)
非
是
是
非
v_dv_e, v_dv_e, v_dv_f 都是红色边?
$v_av_cv_d$, v_av_b, v_d 中有一红色三角形
$v_dv_ev_f$ 是红色三角形
v_av_e, v_ev_f, v_dv_f 中至少有一蓝色边故 $v_av_ev_f$ 或 $v_av_dv_f$ 或 $v_av_dv_e$ 是蓝色三角形
非
是
(注: 设 v_dv_f 为蓝色边)
v_bv_f, v_cv_f 中有一蓝色边?
v_ev_e, v_ev_f, v_ev_f 中有一红色边?
有
无
无
有
$v_bv_dv_f$, $v_cv_dv_f$ 中至少有一蓝色三角形
$v_bv_cv_f$ 是红色三角形
$v_av_ev_f$ 是蓝色三角形
$v_dv_ev_f$, $v_ev_ev_d$, $v_ev_dv_f$ 中至少有一红色三角形

图 3-9-7

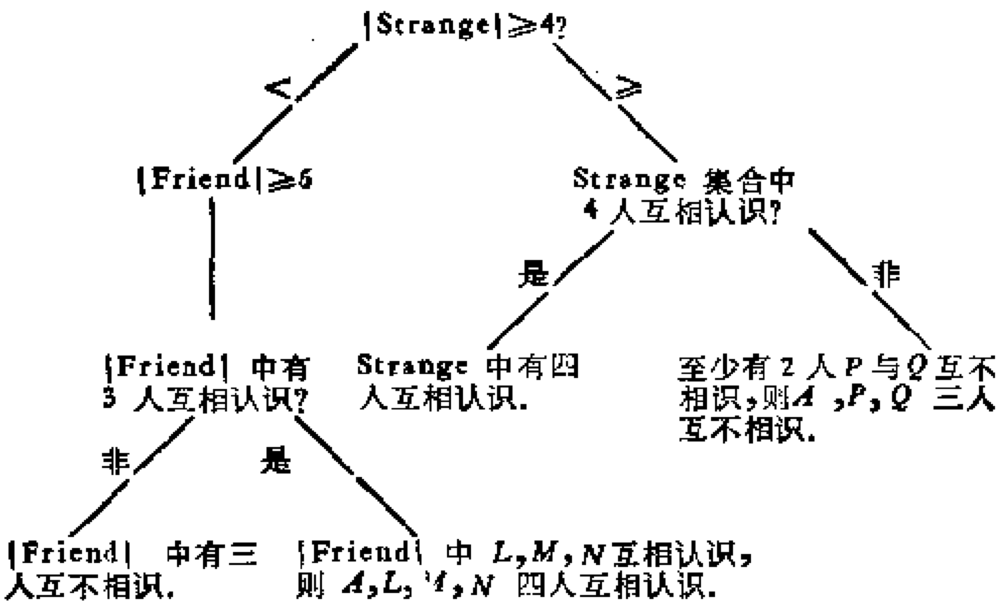
如果 v_bv_f 和 v_cv_f 无一是蓝色边，都是红色边，已知 v_bv_c 是红色边，故 $v_bv_cv_f$ 是一红色边三角形。

证明的方法实际上是采取对各种情况进行全面的搜索。现把搜索过程用判决树形式表示于图 3-9-7，其中 $v_av_bv_c$ 假定是红色边三角形（见图 3-9-8）。

（b）10 人中若不是有 3 人互不相识，则必有 4 人互相认识．类似的道理，10 人中若不是有 3 人互相认识，则必有 4 人互不相识．

证明： 10 人中有一 A，余下的 9 人中分为与 A 互相认识的集合 Friend，及与 A 互不相识的集合 Strange。

现在推理过程用树的形式表示如下。



（c）其实上面问题的结论只要有 9 个人就够了．问题相当于 9 个顶点的完全图用红、蓝二色任意着色，必然是红色边三角形和蓝色边的完全四边形两者必有其一．类似有红色边完全四边形和蓝色边三角形两者必有其一．

证： 设 9 个顶点为 $v_1, v_2, v_3, \cdots, v_9$．对 9 个顶点的完全图的边用红蓝两色任意着色，其结果必不可能所有的顶点与之关联的边中都正好有 3 条边着以红色或着以蓝色．这是因为如若不然，每

个顶点正好有 3 条边着以红颜色(或蓝颜色)，$3\times 9=27$ 是个奇数，这是不可能的。因为每条红色的边都在两端点各计算一次，所得的结果应是偶数。这就证明了，9 个顶点中至少存在一个顶点设为 v_9，该点的 8 条边中着以红色的边数多于 3 或少于 3。分别讨论如下。

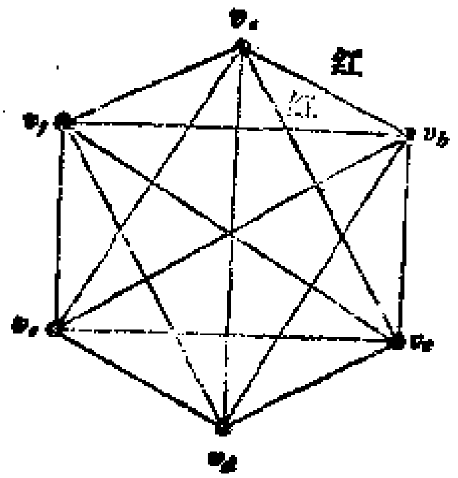


图 3-9-8

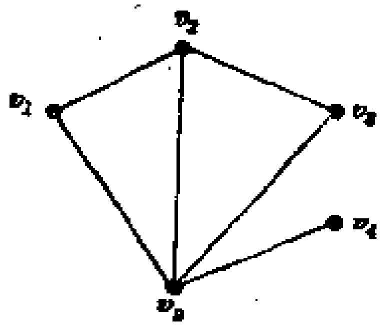


图 3-9-9

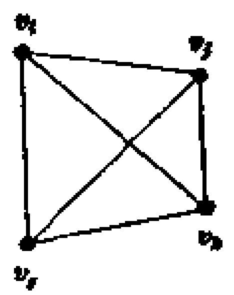


图 3-9-10

①若从 v_9 点引出的 8 条边中，着以红色的边数多于 3，至少有 4 条，设为 $v_1v_9, v_2v_9, v_3v_9, v_4v_9$。

只要 v_1, v_2, v_3, v_4 中任意两点的联线着以红色，设 v_iv_j 为红色边，则 $v_iv_jv_9$ 为红色边的三角形，其中 $i\neq j$。否则 $x_1x_2x_3x_4$ 是

蓝色边的完全四边形(见图 3-9-9).

②若从 v_9 点引出的 8 条边中着以红色的边数少于 3，最多不超过 2，则 v_9 的蓝色边至少有 6 条，设为 $v_1v_9,v_2v_9,v_3v_9,v_4v_9,v_5v_9,v_6v_9$. 由 v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6 六点构成的完全图必有二个同色的三角形. 若一个同色三角形是红色边三角形，则满足问题的结论. 如若是蓝色边的三角形 $v_iv_jv_k$，则 $v_9v_iv_jv_k$ 便是蓝色边的完全四边形(见图 3-9-10).

在上面证明中令"红"与"蓝"互换，便可以得到结论的另一部分.

9 个点再也不能减少了，只要举一个 8 个点的完全图的一种着色方案不满足上面结论就可以了.

(d) 18 人中至少有 4 个人或互相认识或互相不认识.

这问题相当于对 18 个顶点的完全图的边用红、蓝二色任意着色，则至少存在一个同色完全四边形.

设 18 个顶点分别为 $v_1,v_2,\cdots,v_{18}$，从 v_{18} 引出的 17 条边至少有 9 条是同色，不妨假定是红色. 这 9 条红色边的另 9 个端点构成的 9 个顶点的完全图中至少出现一红色边三角形，或一蓝色边的完全四边形. 如果是存在一红色三角形，设为 $v_iv_jv_k$，则 $v_{18}v_iv_jv_k$ 构成一四个顶点的红色边的完全图. 若是存在蓝色边完全四边形图，则满足问题的结论.

§10 Ramsey 数

从上一节讨论中提出一般的问题：一对常数 a 和 b 对应有一个常数 r，使得 r 个人中或有 a 个互相认识，或有 b 个互不相识. 这个 r 的最小值用 $r(a,b)$ 表示. 这相当于对 $r(a,b)$ 个顶点的完全图用红、蓝二色任意着色，至少存在一 a 个顶点的红(蓝)色边完全图，或存在一 b 个顶点的蓝(红)色边的完全图，两者必居其

一。比如

$$r(3,3)=6,\ r(3,4)=9,\ r(4,4)=18.$$

1. Ramsey 数性质

定理: $r(a,b)=r(b,a)$; $r(a,2)=a$.

证明: 第 1 个等式来自对称性,即红与蓝互换性质不变。

第 2 个等式说明 a 个顶点的完全图的边用红、蓝两色任意着色,或存在一红(蓝)色边 a 个顶点的完全图,或存在一条(红)蓝色边。 ■

定理: 当 a、$b\geqslant 2$ 时,

$$r(a,b)\leqslant r(a-1,b)+r(a,b-1).$$

证: 在 $r(a-1,b)+r(a,b-1)$ 个人中有一个 A, 余下的 $r(a-1,b)+r(a,b-1)-1$ 个人分成两个集合:

Friend — 与 A 互相认识的人的集合;

Strange — 与 A 互不相识的人的集合。

则必然有 $|\text{Friend}|\geqslant r(a-1,b)$,或 $|\text{Strange}|\geqslant r(a,b-1)$, 二者必有一个成立。如若不然,

$$|\text{Friend}|\leqslant r(a-1,b)-1,$$
$$|\text{Strange}|\leqslant r(a,b-1)-1,$$

则

$$|\text{Friend}|+|\text{Strange}|\leqslant r(a-1,b)+r(a,b-1)-2$$
$$<r(a-1,b)+r(a,b-1)-1,$$

与假定相矛盾。

若 $|\text{Friend}|\geqslant r(a-1,b)$, 则 Friend 集合中有 $a-1$ 个人互相认识,加上 A 共 a 个人互相认识,或 b 个人互不相识。

若 $|\text{Strange}|\geqslant r(a,b-1)$, 则集合 Strange 中有 a 个是朋友,或 Strange 集合中有 $b-1$ 个互不相识,加上 A 共 b 个人互不相识。

但 $r(a,b)$ 是使得有 a 个互相认识，或有 b 个互不相识的最少人数，故

$$r(a,b) \leqslant r(a-1,b) + r(a,b-1). \qquad \blacksquare$$

2. Ramsey 数的推广

若把以上讨论中红、蓝两种颜色改为 k 种颜色 $c_1,c_2,\cdots,c_k$，把存在 a 条边的同色完全图，或 b 条边的同色完全图，改为或 a_1，或 a_2，$\cdots$，或 a_k 条边的同色完全图，即得 Ramsey 数 $r(a_1,a_2,\cdots,a_k)$。即对 r 个顶点的完全图，用 k 种颜色 $c_1,c_2,\cdots,c_k$ 任意着色，必然是或出现着以 c_1 颜色的 a_1 个顶点的完全图，或出现着以 c_2 颜色的 a_2 个顶点的完全图，…，或出现着以 c_k 颜色的 a_k 个顶点的完全图，这样的整数 r 的最小值用 $r(a_1,a_2,\cdots,a_k)$ 表之。

以 $k=3$ 为例，若 a_1,a_2,a_3 都大于 1，令 $r(a_2,a_3)=p$，用任意二色对 p 个顶点的完全图进行着色，则或出现 a_2 个顶点的同色完全图，或出现 a_3 个顶点的同色完全图。

$$\therefore\ r(a_1,a_2,a_3) \leqslant r(a_1,p) = q.$$

比如用红、蓝两种颜色对 $r(3,6)$ 个顶点的完全图任意着色，结果或出现红色边三角形，或出现蓝色边的 6 个顶点的完全图。

表 3-10-1

b \ a	2	3	4	5	6	7
2	2	3	4	5	6	7
3	3	6	9	14	≤19	
4	4	9	18	≤31		
5	5	14	≤31			
6	6	≤19				
7	7					

若以黄与绿两种颜色代替蓝颜色，对蓝色边的六个顶点完全图进行着色，则或出现黄色边的三角形，或出现绿色边的三角形。

$$\therefore\ r(3,6)\geqslant r(3,3,3).$$

依此类推可得

$$r(a_1,a_2,\cdots,a_n)\leqslant r(a_1,r(a_2,\cdots,a_n))$$

以上仅是讨论 Ramsey 数的性质。

现在将已求得的若干 Ramsey 数列于表 3-10-1 中。

习　　题

1.某甲参加一种会议，会上有 6 位朋友，某甲和其中每一人在会上各相遇 12 次，每二人各相遇 6 次，每三人各相遇 4 次，每四人各相遇 3 次，每五人各相遇 2 次，每六人各相遇 1 次，1 人也没遇见的有 5 次，问某甲共参加几次会议？

2.求从 1 到 500 的整数中被 3 和 5 整除但不被 7 整除的数的个数。

3.n 个代表参加会议，试证其中至少有 2 人各自的朋友数相等。

4.试给下列等式以组合意义

(a) $\dbinom{n-m}{n-k}=\sum\limits_{l=0}^{m}(-1)^l\dbinom{m}{l}\dbinom{n-l}{k},\quad n\geqslant k\geqslant m.$

(b) $\dbinom{l-1}{n-m-1}=\sum\limits_{j=0}^{n-m}(-1)^j\dbinom{n-m}{j}\dbinom{n-m-j+l-1}{l},$

(c) $\dbinom{m+l-1}{m-1}=\dbinom{m+l}{m}-\dbinom{m+l}{m+1}+\dbinom{m+l}{m+2}-\cdots$

$$+(-1)^l\binom{m+l}{m+l}.$$

提示：(*a*) 从 n 个不同元素中取出 k，使得其中必含有 m 个特定元素的方案数为 $\dbinom{n-m}{n-k}$。

(*b*) 把 l 个无区别的球放到 n 个不同的盒子，但有 m 空盒子的方案数为

$\binom{n}{m}\binom{l-1}{n-m-1}$.

5.设有 3 个 7 位的 2 进制数

$$a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ a_6\ a_7,$$
$$b_1\ b_2\ b_3\ b_4\ b_5\ b_6\ b_7,$$
$$c_1\ c_2\ c_3\ c_4\ c_5\ c_6\ c_7,$$

试证存在整数 i 和 j, $1\leqslant i<j\leqslant 7$，使得下列之一必然成立：

$$a_i=a_j=b_i=b_j,\quad a_i=a_j=c_i=c_j,\quad b_i=b_j=c_i=c_j.$$

6.在边长为 1 的正方形内任取 5 点，试证其中至少有两点，其间距离小于 $\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

7.在边长为 1 的等边三角形内任取五点，试证至少有两点距离小于 $\frac{1}{2}$.

8.任取 11 个整数．求证其中至少有两个数它们的差是 10 的倍数．

9.把从 1 到 326 的 326 个整数任意分为 5 个部分，试证其中有一部分至少有一个数是某两个数之和，或是另一个数的两倍．

10．A、B、C 三种材料用作产品 I、II、III 的原料，但要求 I 禁止用 B、C 作原料，II 不能用 B 作原料，III 不允许用 A 作原料，问有多少种安排方案？(假定每种材料只作一种产品的原料)．

11．n 个球放到 m 个盒子中去，$n<\frac{m}{2}(m-1)$，试证其中必有两个盒子有相同的球数．

12．n 个单位各派两名代表出席一会议．$2n$ 位代表围一圆桌坐下．试问

(1) 各单位的代表并排坐着的方案有多少？

(2) 各单位的两人互不相邻的方案数又等于多少？

13.一书架有 m 层，分别放置 m 类不同种类的书，每层 n 册．现将书架上的图书全部取出清理．清理过程要求不打乱所在的类别．试问

(1) m 类书全不在各自原来层次上的方案数有多少？

(2) 每层的 n 本书都不在原来位置上的方案数等于多少？

(3) m层书都不在原来层次，每层n本书也不在原来位置上的方案数又为多少？

14. $(m+1)$行$\left[m\binom{m+1}{2}+1\right]$列的格子用$m$种颜色着色，每格着一种色，其中必有一个4角的格子同色的矩形。

15. 两名教师分别对6名学生同时进行两门课程的面试（每名教师各管一门），每名学生每门面试的时间都是半小时．共有多少不同的面试的顺序？

16. 在平面直角坐标系中至少任取多少个整点（两个坐标都是整数）才能保证其中存在3个点构成的三角形（包含3点在一条直线上）的面积是整数（可以为0）？

17. 在平面直角坐标系中至少任取多少个整点才能保证其中存在3个点构成的三角形的重心是整点？

第四章 Pólya 定理

§1 群的概念

这一章主要讨论 Pólya 计数定理，要用到置换群的概念，所以先对群的基本内容作概括介绍。

1. 群

定义：给定一个集合 $G=\{a,b,c,\cdots\}$，和集合 G 上的二元运算，并满足下列四个条件：

(a) 封闭性：若 $a,b\in G$，则存在 $c\in G$，使得
$$a\cdot b=c.$$
(b) 结合律成立：对于任意的 $a,b,c\in G$，恒有
$$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c).$$
(c) 存在单位元素：G 中存在一个元素 e，使得对于 G 的任意元素 a，恒有
$$a\cdot e=e\cdot a=a,$$
元素 e 称为单位元素。

(d) 存在逆元素：对 G 的任意元素 a，恒有一个 $b\in G$，使得
$$a\cdot b=b\cdot a=e.$$
元素 b 称为是元素 a 的逆元素，记作 a^{-1}，即
$$b=a^{-1}.$$

则称集合 G 在运算 · 之下是一个群，有时也就称 G 是一个群。G

中的元素 a 和 b 的运算 $a\cdot b$ 可简记为 ab.

由于结合律成立，$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$ 记为 $a\cdot b\cdot c$，或记为 abc. 还可以推广到 n 个元素乘积 $a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n$ 等于任意一种结合，比如

$$a_1a_2a_3\cdots a_n=(\cdots((a_1a_2)a_3)\cdots a_n)=(a_1a_2)(a_3\cdots a_n)=\cdots.$$

特别当 $a_1=a_2=\cdots=a_n=a$ 时，可简记为

$$\underbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}_{n\text{个}}=a^n.$$

2. 例

例 1. $G=\{1,-1\}$ 在乘法运算下是一个群.

(*a*) 封闭性：$(1)(-1)=-1,(1)(1)=1,$

$$(-1)(1)=-1,(-1)(-1)=1.$$

(*b*) 结合性：显然.

(*c*) 单位元素：$e=1$.

(*d*) 逆元素：由于 $(1)(1)=1,(-1)(-1)=1,$

$$\text{故}\quad (1)^{-1}=1,(-1)^{-1}=-1.$$

例 2. 对于任意两整数，除以 n 的余数相等时，说它们是相等的，或 mod n 相等.

可证集合 $G=\{0,1,2,\cdots,n-1\}$ 对于 mod$n$ 在加法下是一个群.

(*a*) 封闭性：除以 n 的余数只能是 $0,1,2,\cdots,n-1$，故封闭性成立.

(*b*) 结合律：显然.

(*c*) 单位元素：$e=0$ 是单位元素.

(*d*) 逆元素：对于任意元素 $a\in G$，$a^{-1}=n-a \bmod n$.

例 3. 二维欧几里得空间的刚体旋转变换集合 $T=\{T_\alpha\}$ 构成群，其中

$$T_\alpha:\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\-\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}.$$

下面证明

$$T_\beta\cdot T_\alpha=T_{\alpha+\beta},$$

其中 $T_\beta\cdot T_\alpha$ 表示先对 (x,y) 点作 T_α 变换，再对它的结果作 T_β 的变换。

$$T_\alpha:\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\-\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},$$

$$T_\beta:\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\beta & \sin\beta\\-\sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix},$$

$$\therefore\ T_\beta\cdot T_\alpha:\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\beta & \sin\beta\\-\sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\-\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta & \cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta\\-\cos\alpha\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta & \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos(\alpha+\beta) & \sin(\alpha+\beta)\\-\sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}.$$

$$\therefore\ T_\beta\cdot T_\alpha=T_{\alpha+\beta}.$$ ■

(*a*) 封闭性：由 $T_\alpha\cdot T_\beta=T_{\alpha+\beta}$ 可得封闭性成立。

(*b*) 结合律：$(T_\alpha T_\beta)T_\gamma=T_\alpha(T_\beta T_\gamma)=T_{\alpha+\beta+\gamma}$。

(*c*) 单位元素：$e=T_0$，即 $\alpha=0$ 的旋转为单位元素。

(*d*) 逆元素：T_α 的逆元素为 $T_{-\alpha}$。

若固定一坐标系，任意旋转变换都可对应一矩阵

$$A_\alpha=\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\-\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}.$$

旋转变换之积正好对应于矩阵的乘法，故集合 $\{A_\alpha\}$ 在矩阵乘法下是一个群。

例 1 和 2 群的元素个数是有限的，称为是有限群。有限群 G 的元素个数叫做群的阶，记以 $|G|$。群的元素为无限时，称为无限群，例 3 便是无限群。

若群 G 的任意二元素 a,b 恒满足 $ab=ba$ 时，称 G 为交换群，或 Abel 群。

3. 基本性质

下面定理都是对群 G 而言的。

定理 1： 群的单位元是唯一的。

证： 设有两个单位元 e_1 和 e_2。

根据单位元的定义，e_1 作为单位元有

$$e_1e_2=e_2$$

同理 e_2 作为单位元有

$$e_1e_2=e_1$$

$$\therefore \quad e_1=e_2$$

■

定理 2：

$$ab=ac\Rightarrow b=c$$

$$ba=ca\Rightarrow b=c$$

证： 证其一。因 $ab=ac$，用元素 a 的逆元素 a^{-1} 左乘等号两端得

$$a^{-1}(ab)=a^{-1}(ac).$$

根据结合律有

$$a^{-1}(ab)=(a^{-1}a)b=b$$

同理 $$a^{-1}(ac)=(a^{-1}a)c=c$$

$$\therefore \quad b=c$$ ■

定理 3： G 中每一个元素的逆元素是唯一的。

证： 设元素 a 的逆元素不唯一，有 a^{-1} 和 b，根据定义

$$aa^{-1}=a^{-1}a=e,\ ab=ba=e,$$

即

$$aa^{-1}=ab.$$

用 a^{-1} 左乘等式两端得 $b=a^{-1}$ ■

定理 4: $(abc\cdots lmn)^{-1}=n^{-1}m^{-1}l^{-1}\cdots c^{-1}b^{-1}a^{-1}$.

证: 根据结合律得

$$\begin{aligned}&(abc\cdots lmn)(n^{-1}m^{-1}l^{-1}\cdots c^{-1}b^{-1}a^{-1})\\&\quad=(abc\cdots lm)(nn^{-1})(m^{-1}l^{-1}\cdots c^{-1}b^{-1}a^{-1})\\&\quad=(abc\cdots lm)(m^{-1}l^{-1}\cdots c^{-1}b^{-1}a^{-1})\\&\quad=\cdots=ab(b^{-1}a^{-1})=(a)(a^{-1})=e.\end{aligned}$$

■

定理 5: G 是有限群，$g=|G|$，设

$$G=\{a_1,a_2,\cdots,a_g\}.$$

设 a 是 G 的任意元素，则必存在一个最小常数 $r(a)$，使得

$$a^{r(a)}=e,$$

而且

$$a^{-1}=a^{r(a)-1}.$$

证: 设 g 是群 G 的阶 $|G|$，$a\in G$. 构造

$$\underbrace{a,a^2,\cdots,a^g,a^{g+1}}_{g+1\text{个}},$$

这 $g+1$ 项同属于 G. 然而 G 只有 g 个不同元素，故根据鸽巢原理其中至少有两项相等，设

$$a^l=a^m,\ l\neq m.$$

不妨设 $l>m$，则得 $a^{l-m}=e$. 令 $l-m=r$，

$$\therefore\ aa^{r-1}=e,$$

$$\text{即}\ a^{-1}=a^{r-1}.$$

这就证明了对于任意元素 $a\in G$，存在一最小的正整数 r，使得

$$a^r=e.$$

■

r 便称为是元素 a 的阶，不难发现集合

$$H = \{a, a^2, a^3, \cdots, a^{r-1}, a^r = e\}$$

在原有的运算 · 之下也是一个群。

定义： 设 G 是群，H 是 G 的子集，若 H 在 G 的原有运算下也是一个群，则称 H 是 G 的子群。

§2 置 换 群

置换群是最重要的群，因为所有的有限群都可用之表示。不失一般性，假设 n 个元素 $1,2,\cdots,n$ 之间的一种置换，如元素 1 用 1 到 n 中的某个数 a_1 取代，2 被 1 到 n 中的某个数 a_2 取代，n 被 1 到 n 中的某个数 a_n，取代，表以

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}.$$

例如

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix},\ p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$p_1p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

这表示先作 p_1 的置换，接着作 p_2 的置换，如

$$1 \xrightarrow{p_1} 3 \xrightarrow{p_2} 2,\ 2 \xrightarrow{p_1} 1 \xrightarrow{p_2} 4,\ 3 \xrightarrow{p_1} 2 \xrightarrow{p_2} 3,$$

$$4 \xrightarrow{p_1} 4 \xrightarrow{p_2} 1.$$

故

$$p_1p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

类似有

$$p_2p_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&3&2&1\\4&2&1&3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&1&3\end{pmatrix}.$$

可见

$$p_1p_2\neq p_2p_1.$$

1. 置换群

可以证明 $1,2,\cdots,n$ 间的置换集合，在上面定义的运算下是一个群。

(a) 封闭性

$$\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\a_1&a_2&\cdots&a_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1&a_2&\cdots&a_n\\b_1&b_2&\cdots&b_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\b_1&b_2&\cdots&b_n\end{pmatrix}.$$

(b) 结合性

$$\left(\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\a_1&a_2&\cdots&a_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1&a_2&\cdots&a_n\\b_1&b_2&\cdots&b_n\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}b_1&b_2&\cdots&b_n\\c_1&c_2&\cdots&c_n\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\b_1&b_2&\cdots&b_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1&b_2&\cdots&b_n\\c_1&c_2&\cdots&c_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\c_1&c_2&\cdots&c_n\end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\a_1&a_2&\cdots&a_n\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}a_1&a_2&\cdots&a_n\\b_1&b_2&\cdots&b_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1&b_2&\cdots&b_n\\c_1&c_2&\cdots&c_n\end{pmatrix}\right)$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\a_1&a_2&\cdots&a_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1&a_2&\cdots&a_n\\c_1&c_2&\cdots&c_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\c_1&c_2&\cdots&c_n\end{pmatrix}.$$

故结合律成立。即

$$\left(\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\a_1&a_2&\cdots&a_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1&a_2&\cdots&a_n\\b_1&b_2&\cdots&b_n\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}b_1&b_2&\cdots&b_n\\c_1&c_2&\cdots&c_n\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1 & b_2 & \cdots & b_n\\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n\end{pmatrix}\right).$$

(*c*) 单位元素 e 为

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ 1 & 2 & \cdots & n\end{pmatrix}.$$

(*d*) 逆元素

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ 1 & 2 & \cdots & n\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ 1 & 2 & \cdots & n\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ 1 & 2 & \cdots & n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ 1 & 2 & \cdots & n\end{pmatrix}.$$

2. 例

对等边三角形 ABC,(*a*) 绕过中心的轴 xx' (图 4-2-1), 沿

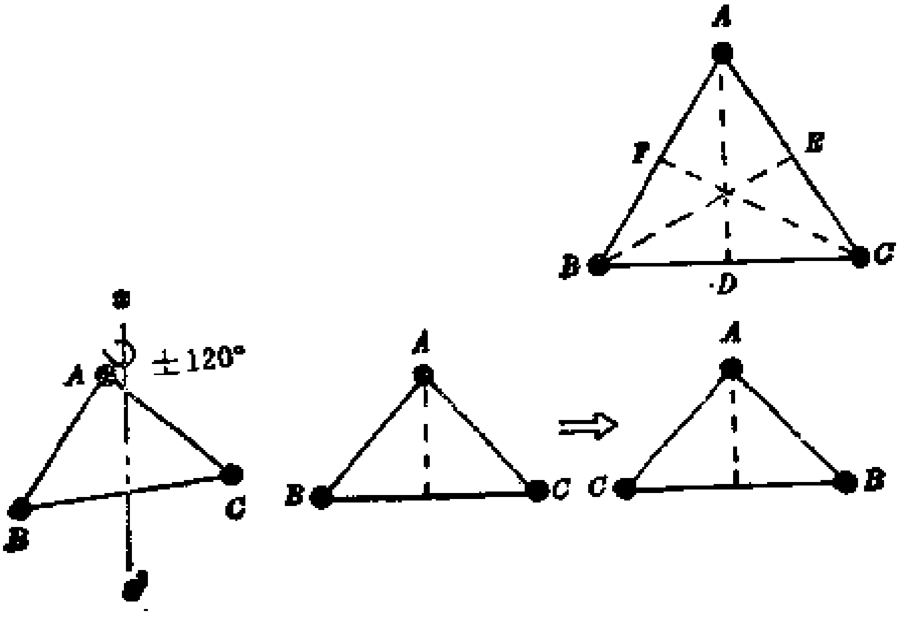


图 4-2-1

表 4-2-1

p_1 \ p_2	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$

反时针方向分别旋转 0°,120°,240°;(*b*) 沿三角形 *ABC* 的中线 *AD*,*BE*,*CF* 翻转 180°. 经 (*a*)、(*b*) 的变换,△*ABC* 重合于本身,但顶点换了位置.

设 *A*,*B*,*C* 分别代以 1,2,3,可得顶点间的置换如下:

$$p_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},\ p_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix},\ p_3=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix},$$

$$p_4=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix},\ p_5=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix},\ p_6=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}.$$

可以证明这 6 个置换是一个群.

从表 4-2-1 可以看出封闭性,结合性,单位元素,逆元素四条件均满足. 故成为一个群. 而且从

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix},$$

可知三角形 ABC 绕中心轴 xx' 旋转 240°，接着绕中线 BE 翻转 180°的结果相当于绕 CF 中线翻转 180°。

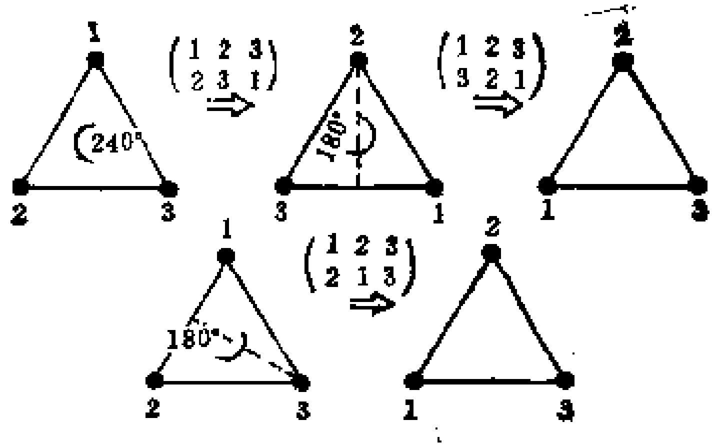


图 4-2-2

n 个元素的置换

$$\begin{pmatrix}1&2&\cdots n\\a_1&a_2&\cdots a_n\end{pmatrix}$$

和 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列 $a_1a_2\cdots a_n$ 一一对应。故由 $n!$ 个排列 $a_1a_2\cdots a_n$ 构成的 $n!$ 个置换

$$\begin{pmatrix}1&2&\cdots n\\a_1&a_2&\cdots a_n\end{pmatrix}$$

是一个群，记以 S_n，称为 n 个文字的对称群。

置换群之所以重要在于任一 n 阶有限群都和一个 n 个文字的置换群同构，即可以用一置换群表示。

证明的方法是建立起有限群 $G=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 的元素 a_i 和置换群的某一置换的对应关系，然后证明其同构。比如对于某一元素 a_i 有

$$a_1a_i,a_2a_i,\cdots,a_na_i.$$

其中所有元素都不相同，如若不然，设

$$a_l a_i = a_m a_i,\ 则\ a_l = a_m.$$

令

$$a_l a_i = a_{i_l}, l = 1, 2, \cdots, n.$$

故元素 $a_i \in G$ 对应 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的某一排列

$$a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_n}$$

令 a_i 和置换

$$p_i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots n \\ i_1 & i_2 & \cdots i_n \end{pmatrix} \tag{4-2-1}$$

对应，即

$$a_i \longleftrightarrow p_i, \tag{4-2-2}$$

进而证其同构。即证若 $a_i \longleftrightarrow p_i, a_j \longleftrightarrow p_j$ 则 $a_i a_j \longleftrightarrow p_i p_j$。证明留作习题。

§3 循环、奇循环与偶循环

下面介绍一种比较简单的表示置换的方法。先约定一个记号

$$(a_1 a_2 \cdots a_m) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \cdots a_{m-1} & a_m \\ a_2 & a_3 \cdots a_m & a_1 \end{pmatrix}$$

叫做 m 阶循环。例如 5 个文字 1, 2, 3, 4, 5 的置换

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} = (1\ 4\ 5\ 2\ 3).$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} = (1\ 5\ 4),$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} = (1\ 3\ 2)(4\ 5).$$

循环(154)中，2, 3 不出现，表示 2 和 3 保持不变，即 (154)=(154)(2)(3)。

$(a_1a_2\cdots a_k)$ 的置换实际上只与元素的相邻状况有关，而与哪个元素为首无关，比如(123)＝(231)．如若两个循环 $(a_1a_2\cdots a_l)$ 和 $(b_1b_2\cdots b_m)$ 没有相同的文字，则称为是不相交的，不相交两循环的乘积可交换．

例如 (132)(45)＝(45)(132)

若 $p=(a_1a_2\cdots a_n)$，则 $p^n=(1)(2)\cdots(n)=e$．例如

$$p=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}=(123),$$

$$p^2=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3&1\\3&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix},$$

$$p^3=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1&2\\1&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$$

$$=(1)(2)(3).$$

定理： 任何一个置换都可表成若干循环的乘积．

证： 对已知置换

$$p=\begin{pmatrix}1&2&3\cdots n\\a_1&a_2a_3\cdots a_n\end{pmatrix}$$

从 1 开始搜索，如 $1\to a_1\to a_2\to\cdots\to a_k\to 1$，则得一循环

$$(1\ a_1\ a_2\cdots a_k)$$

如若 $(1\ a_1\ a_2\cdots a_k)$ 包含了 $(1,2,\cdots,n)$ 的所有文字，则搜索停止．否则在余下的文字中任意确定一个，如法进行，又得一个循环．如此反复进行直到所有元素都取完为止．这样便得到若干不相交的循环，p 就等于这些不相交的循环的乘积．除了循环的次序可以任意交换外，这种表示是唯一的．

例． 编号从 1 到 52 的卡片，分成 1—26，27—52 两部分，交错互相插入，这样一次操作相当于作一次置换

$$p=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10&11&12&13&14\\1&27&2&28&3&29&4&30&5&31&6&32&7&33\end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 28 & 29 & 30 \\ 8 & 34 & 9 & 35 & 10 & 36 & 11 & 37 & 12 & 38 & 13 & 39 & 14 & 40 & 15 & 41 \\ 31 & 32 & 33 & 34 & 35 & 36 & 37 & 38 & 39 & 40 & 41 & 42 & 43 & 44 & 45 & 46 \\ 16 & 42 & 17 & 43 & 18 & 44 & 19 & 45 & 20 & 46 & 21 & 47 & 22 & 48 & 23 & 49 \end{matrix}$$

$$\left.\begin{matrix} 47 & 48 & 49 & 50 & 51 & 52 \\ 24 & 50 & 25 & 51 & 26 & 52 \end{matrix}\right)$$

$$= (1)(2\ 27\ 14\ 33\ 17\ 9\ 5\ 3)(4\ 28\ 40\ 46\ 49\ 25\ 13\ 7)$$
$$(6\ 29\ 15\ 8\ 30\ 41\ 21\ 11)(10\ 31\ 16\ 34\ 43\ 22\ 37\ 19)$$
$$(12\ 32\ 42\ 47\ 24\ 38\ 45\ 23)(18\ 35)(20\ 36\ 44\ 48$$
$$50\ 51\ 26\ 39)(52).$$

可见 p 分解成 1 阶循环 2 个，2 阶循环 1 个，8 阶循环 6 个。由此可见这种的操作重复 8 次又恢复到原来的模样。故

$$p^8 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \cdots 52 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \cdots 52 \end{pmatrix} = e.$$

定义： 2 阶循环 (ij) 叫做 i 和 j 的对换或换位。

定理： 任意一个循环都可以表达成若干换位之积。

这只要给出一个分解的方法就可以了。例如

$$(1\ 2\ 3 \cdots n) = (1\ 2)(1\ 3)\cdots(1\ n).$$

$$(1\ 2)(1\ 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 2\ 3).$$

设 $(1\ 2\ 3 \cdots \overline{n-1}) = (1\ 2)(1\ 3)\cdots(1\ \overline{n-1})$.

则 $(1\ 2\ 3 \cdots \overline{n-1})(1\ n)$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \cdots n-1 \\ 2 & 3 & 4 \cdots\ \ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \cdots n-1 & n \\ n & 2 \cdots n-1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&3&\cdots&n-1&n\\2&3&4&\cdots&1&n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3&\cdots&n-1&1&n\\2&3&\cdots&n-1&n&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&3&\cdots&n-1&n\\2&3&4&\cdots&n&1\end{pmatrix}=(1\ 2\cdots\overline{n-1}\ n).$$

自然，任意循环分解成若干换位乘积不是唯一的。甚至于连换位个数都不相同。例如

$$(1\ 2\ 3)=(1\ 2)(1\ 3)=(1\ 2)(1\ 3)(3\ 1)(1\ 3).$$

尽管如此，有一个性质却是固有的，它不依换位的个数不同而异。那就是循环分解成换位的乘积时，换位个数的奇偶性是不变的。也就是分解成换位之积虽不唯一，或同是分解成奇数个换位之积，或同是偶数个换位之积。其根据何在？下面给予证明。

$$\begin{aligned}f=\prod_{\substack{i<j\\i=1}}^{n}(x_i-x_j)\\
&=(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)\cdots(x_1-x_{n-1})(x_1-x_n)\\
&\qquad(x_2-x_3)(x_2-x_4)\cdots(x_2-x_{n-1})(x_2-x_n)\\
&\qquad\qquad(x_3-x_4)\cdots(x_3-x_{n-1})(x_3-x_n)\\
&\qquad\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\qquad\qquad\qquad(x_{n-2}-x_{n-1})(x_{n-2}-x_n)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad(x_{n-1}-x_n).\end{aligned}$$

设 $k>l$ 是两个常数，则

$$f=(x_k-x_l)\prod_{i\neq k,l}(x_i-x_k)(x_i-x_l)F,$$

其中 F 是其余既不含有 x_k，也不含有 x_l 的部分。

我们来分析 l 和 k 互换时对 f 各因子的影响。显然对 F 是没有影响的，而且 $(x_i-x_l)(x_i-x_k)$ 的结果也不变，但 (x_k-x_l) 变为 $(x_l-x_k)=-(x_k-x_l)$。k 与 l 互换作用于 f 记为$(l\ k)f$，则有

$$(l\ k)f = -f.$$

p 是某一置换，p 分解成换位之积，若 p 分解成奇数个换位之积，则 p 作用于 f 的结果使 f 变号；若 p 分解成偶数个换位之积，则 p 作用于 f 结果不变。p 作用于 f 的结果是固有的，它取决于 p 本身，故 p 分解成奇数个或偶数个换位之积也取决于 p 本身，而不是依赖于分解过程。

定义： 若一个置换可分解成奇数个换位之积，叫做奇置换；若可分解成偶数个换位之积，叫做偶置换。

例如：图 4-3-1 是一个有 4 × 4 格的棋盘，除了右下角的一个格子空着以外，其余 15 个格子布着如图 4-3-1 所标明的棋子。若空着的格子标以 (0)，则图 4-3-1 可以看成是棋子 (1)，(2)，…，(15)的一种布局。与空格相邻的棋子可以与空格互换位置得另一种布局。这样的一次交换位置可以看作是图 4-3-1 所给定的布局的棋子间的一次置换。

①	②	③	④
⑤	⑥	⑦	⑧
⑨	⑩	⑪	⑫
⑬	⑭	⑮	⓪

图 4-3-1

⑮	⑭	⑬	⑫
⑪	⑩	⑨	⑧
⑦	⑥	⑤	④
③	②	①	⓪

图 4-3-2

有些布局是由初始布局图 4-3-1 经过偶数次换位而获得；有些则是经过奇数次换位而得到。由奇数次换位而得到的布局不可能通过偶数次换位而得到。

证明图 3-3-1 的状态无论如何不可能通过标志为“0”的棋子

与其相邻棋子的换位而达到图 4-3-2 的状态。

从图 4-3-1 状态到图 4-3-2 状态相当于作下面的置换：

$$p=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15\\ 0 & 15 & 14 & 13 & 12 & 11 & 10 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

$$=(0)(1\ \ 15)(2\ \ 14)(3\ \ 13)(4\ \ 12)(5\ \ 11)(6\ \ 10)(7\ \ 9)(8).$$

p 是个奇置换．但标志为“0”的棋子从右下角出发返回右下角，必须通过偶数次换位才能实现，即向左向右换位的次数必须相同；向上向下换位的次数也必须相同．得出了矛盾，问题得到证明。

定理： S_n 中偶置换的全体构成一个 $\frac{1}{2}(n!)$ 阶的子群，记作 A_n，称为交代群。

证： 先证 A_n 是 S_n 的子群。首先单位元 $\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots n\\ 1 & 2 & \cdots n\end{pmatrix}=(1)(2)\cdots(n)$ 是偶置换，故 A_n 非空。

(1) 封闭性：若 p_1、p_2 是偶置换，则 $p_3=p_2p_1$ 也是偶置换，故封闭性成立。

(2) 结合律：置换群的结合律成立。

(3) 单位元素：置换群的单位元素本身就是偶置换。

(4) 逆元素：$(i\ \ k)$ 的逆元素为 $(i\ \ k)$，$p=(i_1\ \ j_1)(i_2\ \ j_2)\cdots(i_k\ \ j_k)$的逆元素为

$$p^{-1}=(i_k\ \ j_k)(i_{k-1}\ \ j_{k-1})\cdots(i_2\ \ j_2)(i_1\ \ j_1).$$

$$\begin{aligned}pp^{-1}&=(i_1\ \ j_1)(i_2\ \ j_2)\cdots(i_k\ \ j_k)(i_k\ \ j_k)\cdots(i_2\ \ j_2)(i_1\ \ j_1)\\&=(i_1\ \ j_1)(i_2\ \ j_2)\cdots(i_{k-1}\ \ j_{k-1})(i_{k-1}\ \ j_{k-1})\cdots(i_2\ \ j_2)(i_1\ \ j_1)\\&=\cdots=(i_1\ \ j_1)(i_1\ \ j_1)=(i_1)(j_1)=(1)(2)\cdots(n).\end{aligned}$$

同理证 $p^{-1}p=(1)(2)\cdots(n)$.

令 $B_n=S_n\backslash A_n$ 即 B_n 为 S_n 中奇置换的全体。任取一个换

位 $(i\ j)$，对于 A_n 的任一置换 p，则 $(i\ j)p$ 是奇置换，即 $(i\ j)p\in B_n$。根据§1 定理 2 得

$$|A_n|\leqslant|B_n|. \tag{4-3-1}$$

类似的理由，对于集合 B_n 的任一置换 q，显然有 $(i\ j)q\in A_n$ 即 $(i\ j)q$ 是偶置换。

$$\therefore |B_n|\leqslant|A_n|. \tag{4-3-2}$$

由(4-3-1)和(4-3-2)可得 $|A_n|=|B_n|$。但 $|A_n|+|B_n|=n!$，

$$\therefore |A_n|=\frac{1}{2}n!.$$

§4 Burnside 引理

1. 共轭类

下面先给出群 S_3, A_3, S_4, A_4。希望读者对置换群结构有感性知识。

S_3: {(1)(2)(3),(2 3),(1 2),(1 3),(1 2 3),(1 3 2)}.

A_3: {(1)(2)(3),(1 2 3),(1 3 2)}.

S_4: {(1)(2)(3)(4),(1 2),(1 3),(1 4),(2 3),(2 4),
(3 4),(1 2 3),(1 2 4),(1 3 2),(1 3 4),(1 4 2),(1 4 3),
(2 3 4),(2 4 3),(1 2 3 4),(1 2 4 3),(1 3 2 4),(1 3 4 2),
(1 4 2 3),(1 4 3 2),(1 2)(3 4),(1 3)(2 4),(1 4)(2 3)}.

A_4: {(1)(2)(3)(4),(1 2 3),(1 2 4),(1 3 2),(1 3 4),
(1 4 2),(1 4 3),(2 3 4),(2 4 3),(1 2)(3 4),
(1 3)(2 4),(1 4)(2 3)}.

一般可把 S_n 中任一个置换 p 分解成若干互不相交的循环乘积。

$$p=\underbrace{(a_1\ a_2\cdots a_{k_1})(b_1\ b_2\cdots b_{k_2})\cdots(h_1\ h_2\cdots h_{k_l})}_{l\text{ 项}},$$

其中 $k_1+k_2+\cdots+k_l=n$. 设其中 k 阶循环出现的次数为 c_k, $k=1,2,\cdots,n$. k 阶循环出现 c_k 次，用 $(k)^{c_k}$ 表示。

S_n 中的置换可按分解成格式

$$(1)^{c_1}(2)^{c_2}\cdots(n)^{c_n}$$

的不同而分类。例如 $(1)(23)(4567)$ 属于格式 $(1)^1(2)^1(3)^0(4)^1(5)^0(6)^0(7)^0$；$(1234)(5)(67)$ 也是属于 $(1)^1(2)^1(3)^0(4)^1(5)^0(6)^0(7)^0$ 类。或省去指标为 0 的项写为 $(1)^1(2)^1(4)^1$。显然有

$$\sum_{k=1}^{n} kc_k = n. \tag{4-4-1}$$

在 S_n 中具有相同格式的置换全体，叫做与该格式相应的共轭类。

定理： S_n 中属 $(1)^{c_1}(2)^{c_2}\cdots(n)^{c_n}$ 共轭类的元素个数为

$$\frac{n!}{c_1!c_2!\cdots c_n!\,1^{c_1}2^{c_2}\cdots n^{c_n}} \tag{4-4-2}$$

证： $(1)^{c_1}(2)^{c_2}\cdots(n)^{c_n}$ 格式为

$$\underbrace{\overbrace{(\cdot)(\cdot)\cdots(\cdot)}^{c_1\text{个}}}_{c_1}\ \underbrace{\overbrace{(\cdot\cdot)(\cdot\cdot)\cdots(\cdot\cdot)}^{2c_2\text{个}}}_{c_2}\cdots\cdots\overbrace{(\cdots\cdots)}^{nc_n\text{个}} \tag{4-4-3}$$

$1,2,3,\cdots n$ 的全排列共 $n!$ 个，每个排列依顺序填入格式(4-4-3)，可得属于该共轭类的一个置换。反过来该共轭类的每个置换都可以通过这样而得到。然而由此所得的 $n!$ 个置换中有重复出现的。重复来自(一)由循环 $(a_1a_2a_3\cdots a_k)=(a_2a_3\cdots a_ka_1)=\cdots=(a_ka_1a_2\cdots a_{k-1})$ 引起的，一 k 阶循环可重复 k 次，c_k 个 k 阶循环共重复了 k^{c_k} 次；(二)由互不相交的 c_k 个 k 阶循环乘积的可交换性引起的。例如 $(a_1a_2)(a_3a_4)(a_5a_6)=(a_1a_2)(a_5a_6)(a_3a_4)=(a_3a_4)(a_1a_2)(a_5a_6)=(a_3a_4)(a_5a_6)(a_1a_2)=(a_5a_6)(a_1a_2)(a_3a_4)=(a_5a_6)(a_3a_4)(a_1a_2)$，共重复了 $3!=6$ 次，c_k 个 k 阶循环重复了 $c_k!$ 次。故属于共轭类 $(1)^{c_1}(2)^{c_2}\cdots(n)^{c_n}$ 的元素个数为

$$\frac{n!}{c_1!c_2!\cdots c_n!1^{c_1}2^{c_2}\cdots n^{c_n}}.$$

例如 S_4 中$(2)^2$共轭类有$\frac{4!}{2!2^2}=3$ 个置换，即

$$(1\ 2)(3\ 4),(1\ 3)(2\ 4),(1\ 4)(2\ 3).$$

S_4 中 $(1)^1(3)^1$ 共轭类有 $\frac{4!}{1!3}=8$ 个置换，即

$$(1\ 2\ 3),(1\ 2\ 4),(1\ 3\ 2),(1\ 3\ 4),(1\ 4\ 2),(1\ 4\ 3)(2\ 3\ 4),(2\ 4\ 3).$$

S_4 中 $(1)^2(2)^1$ 的共轭类有 $\frac{4!}{2!2}=6$ 个置换，即

$$(1\ 2),(1\ 3),(1\ 4),(2\ 3),(2\ 4),(3\ 4).$$

S_4 中$(4)^1$共轭类有$\frac{4!}{4}=6$ 个置换，即

$$(1\ 2\ 3\ 4),(1\ 2\ 4\ 3),(1\ 3\ 2\ 4),(1\ 3\ 4\ 2),(1\ 4\ 2\ 3),(1\ 4\ 3\ 2).$$

2. k 不动置换类

设G是$1,2,\cdots,n$的置换群，当然G是 S_n 的一个子群．若k是 1 到n中的某个整数，G中使k保持不变的置换全体，记以Z_k，叫做G中使k保持不动的置换类，或简称k不动置换类．如$G=\{e,(1\ 2),(3\ 4),(1\ 2)(3\ 4)\}$．只要注意$(1\ 2)$实为$(1\ 2)(3)(4)$的缩写．故其中使 1 不动置换类 $Z_1=\{e,(34)\}$，e是单位元．

$$Z_2=\{e,(3\ 4)\};Z_3=Z_4=\{e,(1\ 2)\}.$$

可见 Z_k 是G中有“因子”(k)的置换全体．

又如 $A_4=\{e,(1\ 2\ 3),(1\ 2\ 4),(1\ 3\ 2),(1\ 3\ 4),(1\ 4\ 2),(1\ 4\ 3),(2\ 3\ 4),(2\ 4\ 3),(1\ 2)(3\ 4),(1\ 3)(2\ 4),(1\ 4)(2\ 3)\}$．其中

$$Z_1=\{e,(2\ 3\ 4),(2\ 4\ 3)\};$$
$$Z_2=\{e,(1\ 3\ 4),(1\ 4\ 3)\};$$

$$Z_3 = \{e, (1\ 2\ 4), (1\ 4\ 2)\};$$
$$Z_4 = \{e, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}.$$

定理： G群中关于k的不动置换类 Z_k 是G的一个子群。

证： 封闭性：p_1、p_2 分别是使k不动的两个置换，即 p_1、$p_2 \in Z_k$，则$p_1p_2 \in Z_k$。

结合律：对于群G结合律成立，$Z_k \in G$，故 Z_k 元素的结合律成立。

单位元：群G的单位元属于 Z_k，也是 Z_k 的单位元。

逆元素：$p \in Z_k$ 使k保持不变，$p^{-1} \in G$ 也是使k不变。故 $p^{-1} \in Z_k$。

故 Z_k 本身也是一个群，是群G的一个子群。 ■

3. 等价类

在引进等价类概念之前先举一个例子，$G = \{e, (12), (34), (1\ 2)(3\ 4)\}$，在群$G$作用下数 1 变为 2，2 变为 1；3 变为 4，4 变为 3。故 1 与 2 属于同一类，而 3 和 4 则属于另一类。1 或 2 不能在群G作用下变为 3 或 4，同样 3 或 4 不能变为 1 或 2。k所属的等价类，可以看作是k在G作用下的“踪迹”。

(a) 对于给定的关于 $1, 2, \cdots, n$ 的置换群 G，若存在置换 $p \in G$ 使k变为 l，则存在 $p_2 = p_1^{-1}$ 使 l 变为 k，$p_2 \in G$。单位元素使k变为 k。

(b) 若存在 $p_1 \in G$ 使k变为 l，又存在 p_2 使 l 变为 m，则存在置换 $p_3 = p_1p_2$ 使k变为 m，$p_3 \in G$。即

$$k \xrightarrow{p_1 \in G} l \xrightarrow{p_2 \in G} m,$$

则
$$k \xrightarrow{p_3 = p_1p_2 \in G} m.$$

由 (a)，(b) 知k在G作用下的“踪迹”形成一个封闭的类。故 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 中的数 k，若存在置换 p_1 使之变成 l，则称k和

l 属于同一个等价类。因而 1 到 n 的整数可按群 G 的置换分成若干个等价类，数 k 所属的等价类记以 E_k。

例如 $G=\{e,(1\ 2),(3\ 4),(1\ 2)(3\ 4)\}$。 1 和 2 属于一个等价类，3 和 4 属于另一个等价类。即

$$E_1=E_2=\{1,2\},E_3=E_4=\{3,4\}.$$

对于数 $k(1\leqslant k\leqslant n)$，关于 n 个文字的置换群 G 有对应的等价类 E_k，和不动置换类 Z_k。

定理： $|E_k||Z_k|=|G|,k=1,2,\cdots,n$。

证： 若 $|E_k|=l$，不失一般性，设 $E_k=\{a_1(=k),a_2,\cdots,a_l\}$，$a_1,a_2,\cdots,a_l$ 是 l 个不超过 n 的正整数，而且各不相等。既然 $a_1,a_2,\cdots,a_l$ 属于同一等价类，故存在属于 G 的置换 p_i，使得

$$k\xrightarrow{p_i}a_i,i=1,2,\cdots,l,$$

即置换 p_i 使数 k 变为等价类中 a_i。

$P=\{p_1,p_2,\cdots,p_l\}$ 是属于群 G 的置换的集合，但不是一个群。作 $G_j=Z_kp_j,j=1,2,\cdots,l$。

由于

$$k\xrightarrow{p\in Z_k}k\xrightarrow{p_j}a_j,$$

$$\therefore\ k\xrightarrow{pp_j=p_j'\in Z_kp_j}a_j,j=1,2,\cdots,l,$$

即数 k 在 $p'\in Z_kp_j$ 的作用下变为 a_j。

$G_j=Z_kp_j$ 的元素属于 G，而且当 $i\neq j$ 时 $G_i\cap G_j=\phi$，即 G_i 和 G_j 没有相同的元素。故

$$G_1\dotplus G_2\dotplus\cdots\dotplus G_l\subseteq G,\tag{4-4-4}$$

或

$$Z_kp_1\dotplus Z_kp_2\dotplus\cdots\dotplus Z_kp_l\subseteq G.$$

符号 $\dotplus$ 表示不相交集合的并。

另一方面，凡属于 G 的任一置换 p，有

$$k\xrightarrow{p}a_j,$$

即在 p 的作用下变为某一元素 a_j，依据元素 k 的等价类，故存在 $p_j \in G$，使得 $k \xrightarrow{p_j} a_j$。

$$\therefore\ k \xrightarrow{p \in G} a_j \xrightarrow{p_j^{-1}} k,$$

即

$$k \xrightarrow{pp_j^{-1}} k.$$

依据 Z_k 的定义

$$\therefore\ pp_j^{-1} \in Z_k,$$
$$p \in Z_k p_j.$$

p 是 G 的任意元素，故有

$$G \subseteq Z_k p_1 + Z_k p_2 + \cdots + Z_k p_l \qquad (4\text{-}4\text{-}5)$$

由(4-4-4)及(4-4-5)可得

$$G = Z_k p_1 + Z_k p_2 + \cdots + Z_k p_l$$
$$\therefore\ |G| = |Z_k p_1| + |Z_k p_2| + \cdots + |Z_k p_l|$$
$$= |Z_k| + |Z_k| + \cdots + |Z_k|$$
$$= l|Z_k| = |E_k||Z_k| \qquad ■$$

例如 $G = A_4, E_1 = \{1,2,3,4\}$，

$Z_1 = \{e,(234),(243)\}$.

A_4 中存在单位元素 $p_1 = e$ 使 $1 \xrightarrow{e} 1$；存在置换 $p_2 = (1\ 2)(3\ 4)$，使 $1 \xrightarrow{p_2} 2$；存在置换 $p_3 = (1\ 3)(2\ 4)$，使 $1 \xrightarrow{p_3} 3$；置换 $p_4 = (1\ 4)(2\ 3)$，使 $1 \xrightarrow{p_4} 4$。

$$
\begin{aligned}
Z_1p_1 &= \{e,(2\ 3\ 4),(2\ 4\ 3)\},\\
Z_1p_2 &= \{(1\ 2)(3\ 4),(1\ 2\ 4),(1\ 2\ 3)\},\\
Z_1p_3 &= \{(1\ 3)(2\ 4),(1\ 3\ 2),(1\ 3\ 4)\},\\
+)\ Z_1p_4 &= \{(1\ 4)(2\ 3),(1\ 4\ 3),(1\ 4\ 2)\},
\end{aligned}
$$

$$Z_1p_1 + Z_1p_2 + Z_1p_3 + Z_1p_4 = A_4.$$

4. Burnside 引理

设 $G=\{a_1, a_2, \cdots, a_g\}$，其中 $a_1=e$，若把 a_k 分解成不相交的循环的乘积，$k=1,2,\cdots,g$。记 $c_1(a_k)$ 为置换 a_k 中 1 阶循环的个数，即在 a_k 作用下保持不变的元素的个数，例如

$$G=\{e,(1\ 2),(3\ 4),(1\ 2)(3\ 4)\}.$$

$$a_1=e=(1)(2)(3)(4),\ c_1(a_1)=4;$$

$$a_2=(1\ 2)=(1\ 2)(3)(4),\ c_1(a_2)=2;$$

$$a_3=(3\ 4)=(1)(2)(3\ 4),\ c_1(a_3)=2;$$

$$a_4=(1\ 2)(3\ 4),\ c_1(a_4)=0.$$

Burnside 引理：设 G 是 $N=\{1,2,\cdots,n\}$ 上的置换群，G 在 N 上可引出不同的等价类，其不同的等价类的个数为

$$l=\frac{1}{|G|}[c_1(a_1)+c_1(a_2)+\cdots+c_1(a_g)].$$

在证明以前，以 $G=\{e,(1\ 2),(3\ 4),(1\ 2)(3\ 4)\}$ 为例进行分析，有了感性知识，再进行证明就不难了。

表 4-4-1 中的

$$s_{jk}=\begin{cases}1, 若数\ k\ 在置换\ a_j\ 作用下不改变即\ k\xrightarrow{a_j}k.\\0, k\xrightarrow{a_j}l\neq k.\end{cases}$$

故第 j 行求和等于 $c_1(a_j)$；第 k 列求和等于 $|Z_k|$。

$$表中元素的总和=\sum_{j=1}^{g}\sum_{k=1}^{n}s_{jk}=\sum_{k=1}^{n}|Z_k|=\sum_{j=1}^{g}c_1(a_j).$$

定理的证明：仿上例，作表 4-4-2。

表中

$$s_{jk}=\begin{cases}0, 若\ a_j\notin Z_k, 即\ k\xrightarrow{a_j\notin Z_k}l(\neq k),\\1, 若\ a_j\in Z_k, 即\ k\xrightarrow{a_j\in Z_k}k.\end{cases}$$

表 4-4-1

a_j \ s_{jk} \ k	1	2	3	4	$c_1(a_j)$	格　式
(1)(2)(3)(4)	1	1	1	1	4	$(1)^4(2)^0(3)^0(4)^0$
(1 2)(3)(4)	0	0	1	1	2	$(1)^2(2)^1(3)^0(4)^0$
(1)(2)(3 4)	1	1	0	0	2	$(1)^2(2)^1(3)^0(4)^0$
(1 2)(3 4)	0	0	0	0	0	$(1)^0(2)^2(3)^0(4)^0$
$\|Z_k\|$	2	2	2	2	8	

表 4-4-2

a_j \ s_{jk} \ k	1 2 3 … n	$c_1(a_j)$
a_1	s_{11} s_{12} s_{13} ……s_{1n}	$c_1(a_1)$
a_2	s_{21} s_{22} s_{23} ……s_{2n}	$c_1(a_2)$
⋮	…………………………	⋮
a_g	s_{g1} s_{g2} s_{g3} ……s_{gn}	$c_1(a_g)$
$\|Z_k\|$	$\|Z_1\|\|Z_2\|\|Z_3\|$……$\|Z_n\|$	$\sum_{j=1}^{g} c_1(a_j)=\sum_{k=1}^{n}\|Z_k\|$

$$\because \quad \sum_{k=1}^{n} s_{jk}=c_1(a_j); \quad \sum_{j=1}^{g} s_{jk}=|Z_k|.$$

$$\therefore \quad \sum_{j=1}^{g}\sum_{k=1}^{n} s_{jk}=\sum_{j=1}^{g} c_1(a_j)=\sum_{k=1}^{n} |Z_k|.$$

若 $N=\{1,2,\cdots,n\}$ 分解成 l 个等价类，

$$N=E_1 \dotplus E_2 \dotplus \cdots \dotplus E_l,$$

而且当 j 和 k 属于同一等价类，则 $|E_k||Z_k|=|G|$。由于 $|E_j|=|E_k|$ $\therefore |Z_j|=|Z_k|$

故 $\sum_{k=1}^{n}|Z_k|=\sum_{i=1}^{l}\sum_{k\in E_i}|Z_k|=\sum_{i=1}^{l}|E_i||Z_i|$。

由于

$$|E_i||Z_i|=|G|, i=1,2,\cdots,l.$$

$$\therefore \quad \sum_{k=1}^{n}|Z_k|=l|G|,\ l=\frac{1}{|G|}\sum_{k=1}^{n}|Z_k|.$$

5. 例

一正方形均分成 4 个格子，用两种颜色对 4 个格子着色，问能得到多少种不同的图象？经过旋转使之吻合的两种方案，算是同一方案。

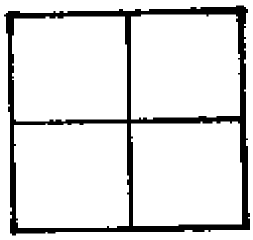


图 4-4-1

每格有两种颜色可供选择．故有图 4-4-2 的 16 种可能方案． 图 4-4-2 中，当每个图都绕过中心点的轴按反时针方向旋转 90°，180°，270°时得 16 种图象的又一种排列，可以看作是图 4-4-2 的 16 种图象的一种置换．分别讨论如下．

(*a*) 旋转 0° 为不动置换

$$p_1=(c_1)(c_2)(c_3)(c_4)(c_5)(c_6)(c_7)(c_8)(c_9)(c_{10})(c_{11})(c_{12})(c_{13})(c_{14})(c_{15})(c_{16}).$$

(*b*) 旋转 90°，这时 c_3 被 c_4 取代，c_4 被 c_5 取代，…，c_{16} 被 c_{13} 取代。

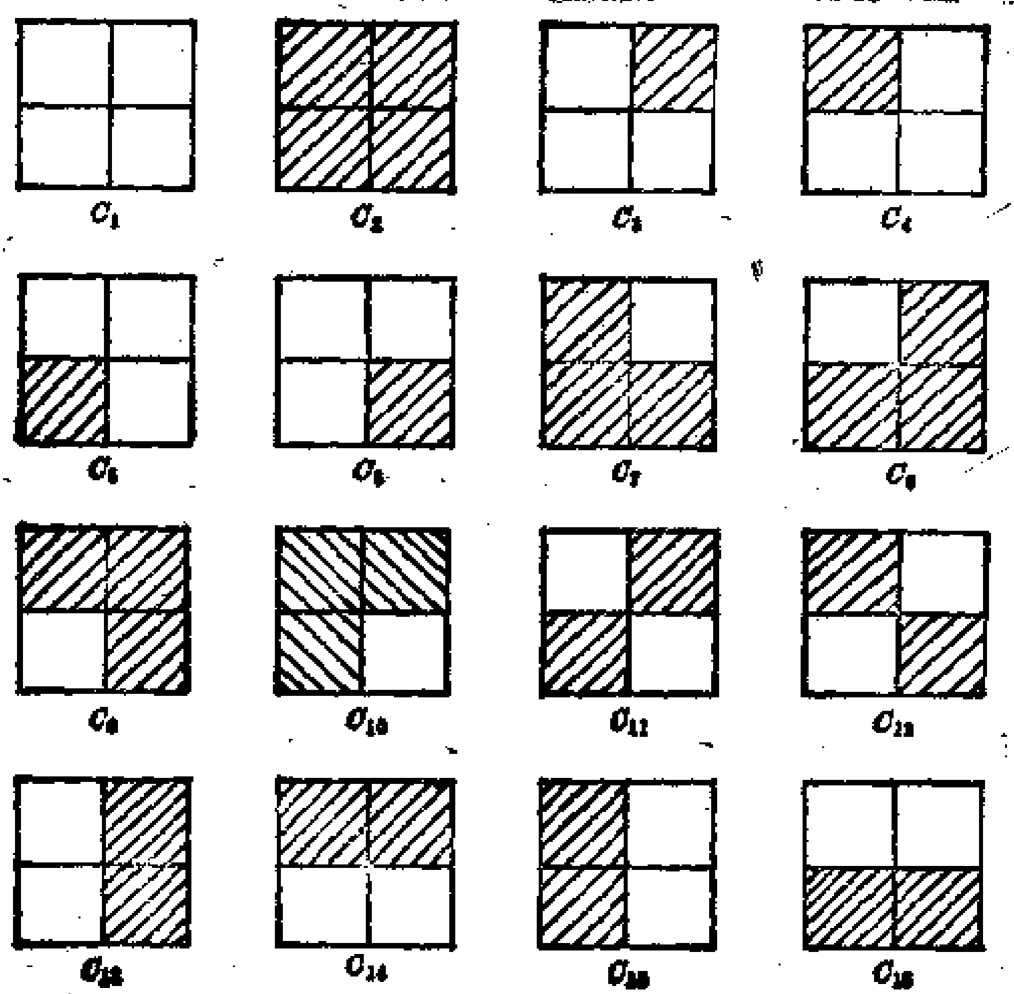


图 4-4-2

$$\therefore p_2 = (c_1)(c_2)(c_3c_4c_5c_6)(c_7c_8c_9c_{10})(c_{11}c_{12})(c_{13}c_{14}c_{15}c_{16}).$$

(*c*) 旋转 180°，这时 c_3 和 c_5 互换，c_4 和 c_6 互换，…，故有

$$p_3 = (c_1)(c_2)(c_3c_5)(c_4c_6)(c_7c_9)(c_8c_{10})(c_{11})(c_{12})(c_{13}c_{15})(c_{14}c_{16}).$$

(*d*) 旋转 270°，

$$p_4 = (c_1)(c_2)(c_6c_5c_4c_3)(c_{10}c_9c_8c_7)(c_{11}c_{12})(c_{16}c_{15}c_{14}c_{13}).$$

不同的等价类个数为

$$l = \frac{1}{4}(16 + 2 + 4 + 2) = 6.$$

其中 $c_1(p_1) = 16, c_1(p_2) = 2, c_1(p_3) = 4, c_1(p_4) = 2$. 6个不相

同的图象如图 4-4-3。

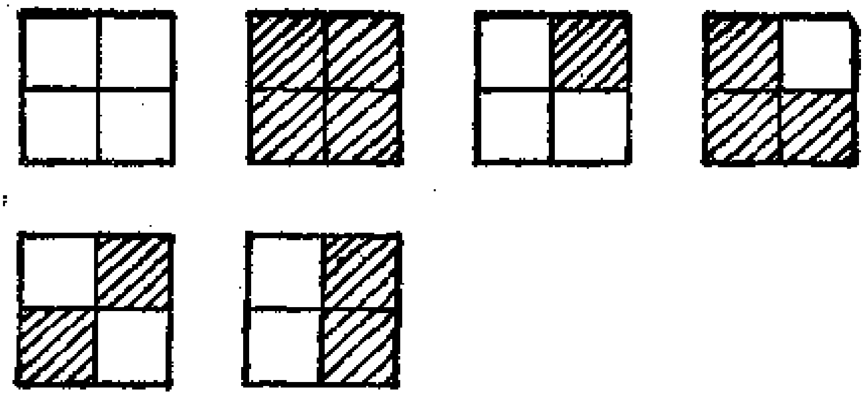


图 4-4-3

§5 Pólya 定 理

上节的 Burnside 引理理论上也可以用来研究 $m(>2)$ 种颜色的不同着色方案的计数问题，然而问题将复杂多了。本节将介绍 Pólya 计数定理。

设有 n 个对象，$\bar{G}$ 是这 n 个对象上的置换群。今用 m 种颜色涂染这 n 个对象。每个对象涂一种颜色，问有多少种染色方案？一种染色方案在群 $\bar{G}$ 的作用下变为另一种方案，则这两方案当作是同一种方案。

定理：(Pólya)： 设 $\bar{G}$ 是 n 个对象的一个置换群，用 m 种颜色涂染这 n 个对象，则不同染色方案数为

$$l=\frac{1}{|\bar{G}|}\left[m^{c(\bar{a}_1)}+m^{c(\bar{a}_2)}+\cdots+m^{c(\bar{a}_g)}\right].$$

其中 $\bar{G}=\{\bar{a}_1,\bar{a}_2,\cdots,\bar{a}_g\}$，$c(\bar{a}_k)$ 为置换 $\bar{a}_k$ 的循环节数。

n 个对象可用 $1,2,\cdots,n$ 编有序号，故 $\bar{G}$ 可当作 $(1,2,\cdots,n)$ 的一个置换群。

Pólya 定理中的 $\bar{G}$ 群是作用在 n 个对象上的置换群，相应地

Burnside 定理中的G群是在这n个对象上用m种颜色进行染色后的方案集合上的置换群。G群与$\bar{G}$群之间的联系是这样的，对应于群$\bar{G}$的元素$\bar{p}\in\bar{G}$，相应地在染色方案集上也诱导出一个属于G的置换p。只要证明$c_1(p)=m^{c(\bar{p})}$即可。

在证明以前先就前面的例子进行分析，然后推广到一般。

图 4-5-1 的涂色方案见图 4-4-2，图 4-5-1 的置换群为

$$\bar{p}_1=(1)(2)(3)(4),$$
$$\bar{p}_2=(4\ 3\ 2\ 1),$$
$$\bar{p}_3=(1\ 3)(2\ 4),$$
$$\bar{p}_4=(1\ 2\ 3\ 4).$$

分别对应于图 4-4-2 中方案集的置换。

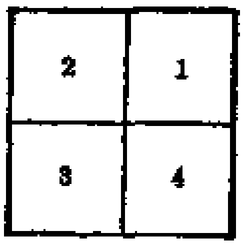


图 4-5-1

$$p_1=(c_1)(c_2)(c_3)(c_4)(c_5)(c_6)(c_7)(c_8)(c_9)(c_{10})$$
$$(c_{11})(c_{12})(c_{13})(c_{14})(c_{15})(c_{16}).$$
$$p_2=(c_1)(c_2)(c_3c_4c_5c_6)(c_7c_8c_9c_{10})(c_{11}c_{12})(c_{13}c_{14}c_{15}c_{16}),$$
$$p_3=(c_1)(c_2)(c_3c_5)(c_4c_6)(c_7c_9)(c_8c_{10})(c_{11})(c_{12})$$
$$(c_{13}c_{15})(c_{14}c_{16}),$$
$$p_4=(c_1)(c_2)(c_6c_5c_4c_3)(c_{10}c_9c_8c_7)(c_{11}c_{12})(c_{16}c_{15}c_{14}c_{13}).$$

仔细观察其中的关系，首先不难发现有

$$c(\bar{p}_1)=4,\ 对应\ c_1(p_1)=2^{c(\bar{p}_1)}=2^4=16;$$
$$c(\bar{p}_2)=1,\ 对应\ c_1(p_2)=2^{c(\bar{p}_2)}=2^1=2;$$
$$c(\bar{p}_3)=2,\ 对应\ c_1(p_3)=2^{c(\bar{p}_3)}=2^2=4;$$

$$c(\bar{p}_4)=1,\ \text{对应}\ c_1(p_4)=2^{c(\bar{p}_4)}=2^1=2.$$

其次还可以发现，在 p_i 作用下不变的图象，正好是对应的 $\bar{p}_i$ 的循环节中的对象染以相同的颜色所得的图象．举个例子，$\bar{p}_2=(4\ 3\ 2\ 1)$，对应的 p_2 中一阶循环节为 (c_1) 和 (c_2)．见图 4-4-3，图象 c_1,c_2 正好是 1，2，3，4 着以同一种颜色所得的结果

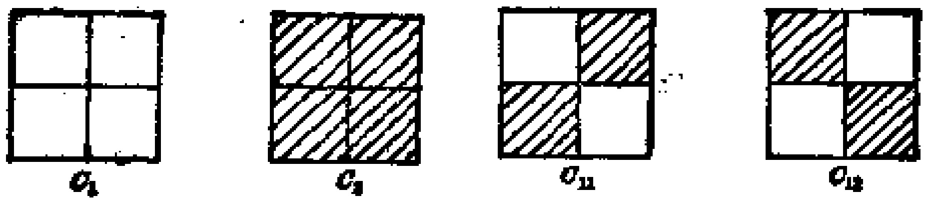


图 4-5-2

又如 $\bar{p}_3=(1\ 3)(2\ 4)$，对应的 p_3 中一阶循环节为 $(c_1)(c_2)(c_{11})(c_{12})$，正好是 1 和 3，2 和 4 分别着相同的颜色的结果（见图 4-5-2）。

定理的证明：

假定 n 个对象用 m 种颜色进行涂色所得的方案集合为 S，显然 $|S|=m^n$。

$\bar{G}$ 的每一个元素 $\bar{a}_j$ 对应于 n 个对象的一个排列，也对应了 S 中的 m^n 个涂色方案的一个排列，记作 a_j。

这样 n 个对象上的群 $\bar{G}$，对应于作用在 S 上的群 G。

$$\therefore\ |G|=|\bar{G}|,$$

而且有 $c_1(a_j)=m^{c(\bar{a}_j)}$。和前面讨论一样，可得 S 按 G 分成不同的等价类的个数为。

$$l=\frac{1}{|G|}\left[c_1(a_1)+c_1(a_2)+\cdots+c_1(a_g)\right]$$

$$=\frac{1}{|\bar{G}|}\left[m^{c(\bar{a}_1)}+m^{c(\bar{a}_2)}+\cdots+m^{c(\bar{a}_g)}\right].\qquad\blacksquare$$

§6 例

例1. 下图中 $v_1v_2v_3$ 是等边三角形，用红、蓝、绿三色对顶点进行着色，试问有几种不同方案？

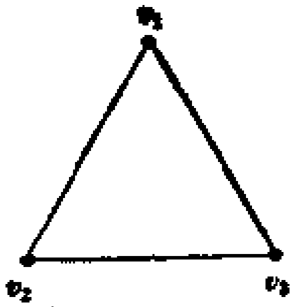


图 4-6-1

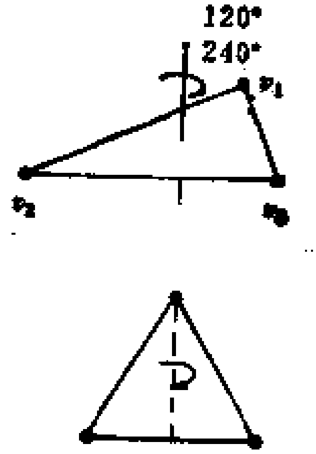


图 4-6-2

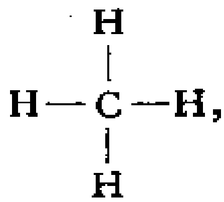
解： 图 4-6-1 可以分别绕三角形的中心旋转 0°，120°，240°，以及过三顶点的中线翻转．如图 4-6-2 所示，得群：

$$G=\{(v_1)(v_2)(v_3),(v_1v_2v_3),(v_3v_2v_1),$$
$$(v_1)(v_2v_3),(v_2)(v_1v_3),(v_3)(v_1v_2)\}.$$

故不同的方案数

$$m=\frac{1}{6}[3^3+2\cdot 3^1+3\cdot 3^2]$$
$$=\frac{1}{6}[27+6+27]=10.$$

这 10 种染色方案见图 4-6-3.

例2. 甲烷 CH_4 的枝链是 ，若 4 个 H 键用 H，

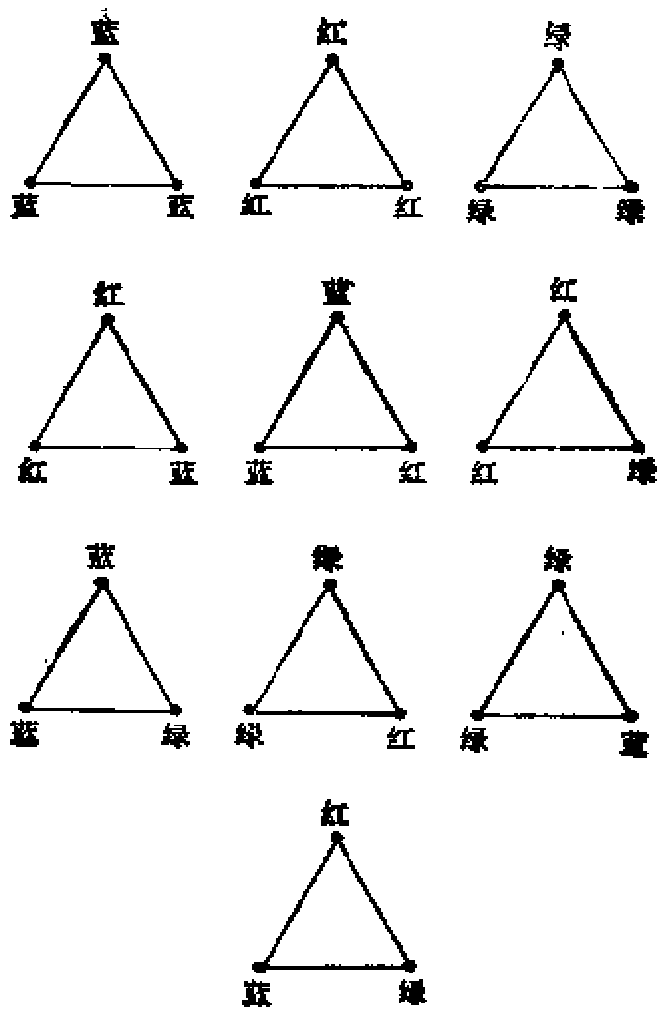


图 4-6-3

Cl，CH_3，C_2H_5 之一取代，问有几种不同的化学结构？

解： 问题相当于对正四面体的四个顶点用四种颜色着色，求不同的方案数。使正四面体 $v_1v_2v_3v_4$ 重合的刚体运动有两类，一是绕过顶点的中心线 xx' 旋转 120°，240°；一是绕如 v_1v_2，v_3v_4 中点取线 yy' 旋转180°，图 4-6-4 的旋转群 G 的元素为：

$$(v_1)(v_2)(v_3)(v_4),(v_1)(v_2v_3v_4),$$
$$(v_1)(v_4v_3v_2),(v_2)(v_1v_3v_4),$$
$$(v_2)(v_4v_3v_1),(v_3)(v_1v_2v_4),$$
$$(v_3)(v_4v_2v_1),(v_4)(v_1v_2v_3),$$

$$(v_4)(v_3v_2v_1),(v_1v_2)(v_3v_4),$$
$$(v_1v_3)(v_2v_4),(v_1v_4)(v_2v_3).$$

故不同的化学结构数目为

$$\frac{1}{12}[4^4+8\cdot4^2+3\cdot4^2]=\frac{1}{12}[256+128+48]=36.$$

例 3. 求三个布尔变量 x_1,x_2,x_3 的布尔函数装置(如图 4-6-5 所示)有多少种不同结构?

三个变量的布尔函数有 $2^8=256$ 个. 但布尔函数 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的装置可以通过改变输入端的顺序而得到, 不必改变装置本身的内部结构.

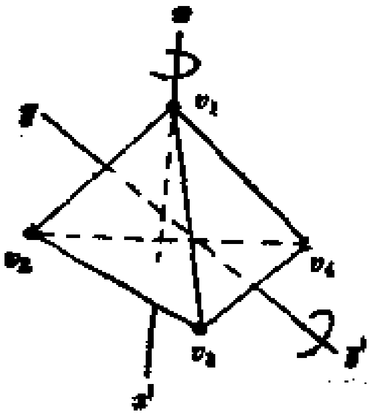


图 4-6-4

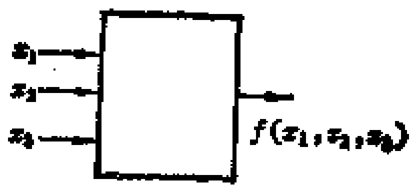


图 4-6-5

解: 图 4-6-5 的三个输入端的变换群 H 为

$$h_1=(x_1)(x_2)(x_3),\ h_2=(x_1x_2x_3),\ h_3=(x_3x_2x_1),$$
$$h_4=(x_1)(x_2x_3),\ h_5=(x_2)(x_1x_3),\ h_6=(x_3)(x_1x_2).$$

$x_1x_2x_3$ 的状态集合 $s=\{a_0=000,\ a_1=001,\ a_2=010,\ a_3=011,a_4=100,a_5=101,a_6=110,a_7=111\}$. 比如 s 在置换 $h_2=(x_1x_2x_3)$ 作用下得 $\{000,010,100,110,001,011,101,111\}$, 相当于得一置换

$$\begin{pmatrix}000 & 001 & 010 & 011 & 100 & 101 & 110 & 111\\ 000 & 010 & 100 & 110 & 001 & 011 & 101 & 111\end{pmatrix}.$$

即对应于置换 $(x_1x_2x_3)$ 有置换.

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 \end{pmatrix} = (a_0)(a_1a_2a_4)(a_3a_6a_5)(a_7).$$

由此得和群 H 相对应的群 G 为

$$p_1 = (a_0)(a_1)(a_2)(a_3)(a_4)(a_5)(a_6)(a_7),$$
$$p_2 = (a_0)(a_1a_2a_4)(a_3a_6a_5)(a_7),$$
$$p_3 = (a_0)(a_1a_4a_2)(a_3a_5a_6)(a_7),$$
$$p_4 = (a_0)(a_1a_2)(a_3)(a_4)(a_5a_6)(a_7),$$
$$p_5 = (a_0)(a_1a_4)(a_2)(a_3a_6)(a_5)(a_7),$$
$$p_6 = (a_0)(a_1)(a_2a_4)(a_3a_5)(a_6)(a_7).$$

求不同布尔函数装置的问题，相当于求服从群 G 的变换的 8 个顶点 $a_0,a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7$ 用两种不同颜色(相当于布尔函数的 0,1 状态)对之着色的不同方案数. 根据 Pólya 定理应有

$$m = \frac{1}{6}(2^8 + 3 \cdot 2^6 + 2 \cdot 2^4) = \frac{480}{6} = 80 \text{ 种}.$$

这个结果告诉我们,实质上不同的结构不是 256 种,而是 80 种,其他可通过改变输人端的顺序而得到.

例 4. 正六面体的六个面分别用红、蓝两种颜色着色,问有多少种不同方案?

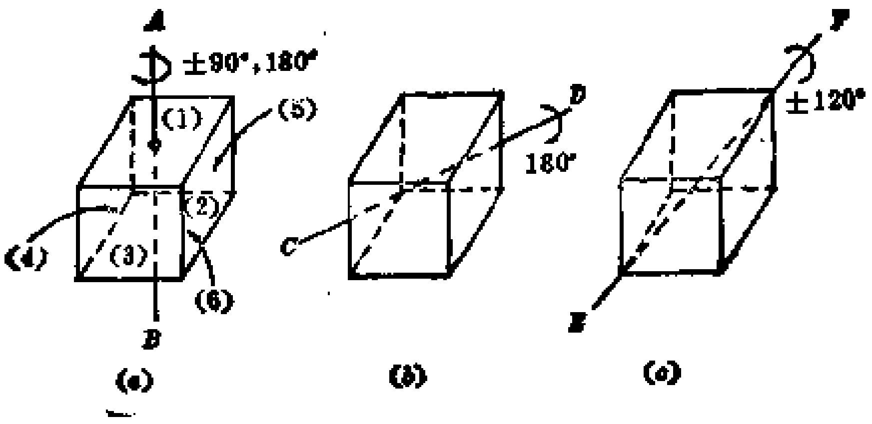


图 4-6-6

使正六面体重合的刚体运动群，有如下几种情况，如图4-6-6.

①不动置换，即单位元素(1)(2)(3)(4)(5)(6)，格式为$(1)^6$.

②绕过(1)面(6)面中心的 *AB* 轴(图 (*a*))，旋转±90°. 对应有

$$(1)(2\ 3\ 4\ 5)(6),(1)(5\ 4\ 3\ 2)(6).$$

格式为$(1)^2(4)^1$. 正六面体有三个对面，故同类的置换有 6 个.

③绕 *AB* 轴旋转 180° 的有(1)(2 4)(3 5)(6)，格式为 $(1)^2(2)^2$，同类的置换有 3 个.

④绕 *CD* 轴旋转 180°(图 (*b*)) 的置换为

$$(1\ 6)(2\ 5)(3\ 4),\text{格式为}(2)^3.$$

正六面体中对角线位置的平行的棱有 6 对，故同类的置换有 6 个.

⑤绕正六面体的对角线 *EF* 旋转±120°(图 (*c*))，绕 *EF* 旋转 120°的置换为(3 4 6)(1 5 2). 绕 *EF* 旋转 −120° 的置换为(6 4 3)(2 5 1)，格式为 $(3)^2$.

正六面体的对角线有 4，故同类的置换 8 个.

于是不同的染色方案数为

$$M=\frac{1}{24}[2^6+6\cdot 2^3+3\cdot 2^4+6\cdot 2^3+8\cdot 2^2]$$

$$=\frac{1}{24}[64+48+48+48+32]=10.$$

例 5. 用两种颜色给正六面体的八个顶点着色，试问有多少种不同的方案?

和例 4 相似，不过把六个面的着色改为 8 个点的着色，使正六面体重合的关于顶点的运动群是

(1) 单位元素(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)，格式$(1)^8$.

(2) 绕 xx' 轴旋转±90°的置换分别为(1 2 3 4)(5 6 7 8)，

$(4\ 3\ 2\ 1)(8\ 7\ 6\ 5)$，格式为$(4)^2$，同类的置换有 6 个。

(3) 绕 xx' 轴旋转 180°的置换为$(1\ 3)(2\ 4)(5\ 7)(6\ 8)$，格式为$(2)^4$，同类的置换有 3 个。

(4) 绕 yy' 轴旋转 180° 的置换$(1\ 7)(2\ 6)(3\ 5)(4\ 8)$格式为$(2)^4$，同类的置换有 6 个。

(5) 绕 zz' 旋转±120°的置换分别为

$$(1\ 3\ 6)(4\ 7\ 5)(8)(2),(6\ 3\ 1)(5\ 7\ 4)(2)(8).$$

格式为$(3)^2(1)^2$。同类的置换有 8 个。

依据 Pólya 定理，不同的方案数为

$$m=\frac{1}{24}(2^8+6\cdot 2^2+3\cdot 2^4+6\cdot 2^4+8\cdot 2^4)$$

$$=\frac{552}{24}=23.$$

例 6. 骰子的六个面分别有 1,2,3,4,5,6 个点，问有多少种不同的方案?

解法 1:

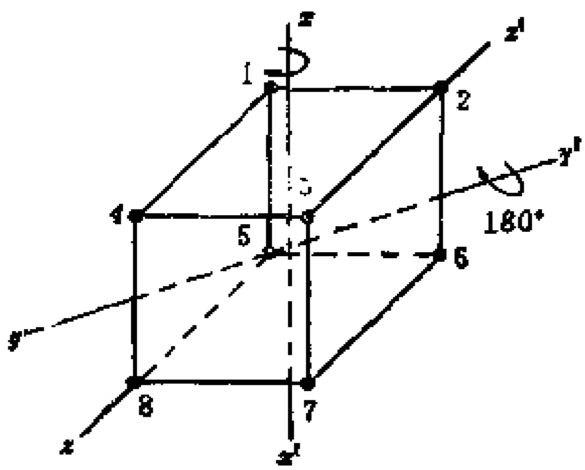


图 4-6-7

问题相当于对正六面体的六个面，用六种颜色对之染色，要求各面的颜色都不一样，求不同的方案数.

6个面用6种颜色涂染，各个面颜色不同应有 6! 种方案. 但其中有的经旋转使之重合的算同一种. 依据例 4，可知旋转运动群共有 24 个置换，观察这 6! 种方案在这群的作用下的置换关系。

设 6! 种方案为 $s_1,s_2,\cdots,s_{6!}$.

单位元素对应的置换为 $(s_1)(s_2)\cdots(s_{6!})$。

由于6个面颜色均不相同，故对其它23个置换没有一种方案能保持不变的。设24个置换中 p_0 为单位元素，即不动置换。其余为 $p_1, p_2, \cdots, p_{23}$。因此有

$$c_1(p_0) = 6!, c_1(p_1) = c_1(p_2) = c_1(p_3) = \cdots = c_1(p_{23}) = 0.$$

根据 Burnside 引理，不同方案数应为

$$m = \frac{1}{24}[6! + 0 + \cdots + 0] = 30.$$

解法2：

下面用的是 Pólya 定理和容斥原理。

使正六面体重合的置换群见例4。用 m 种颜色对正六面体的六个面进行涂染可得不同方案数为 n_m，有

$$n_m = \frac{1}{24}[m^6 + 3m^4 + 12m^3 + 8m^2].$$

$$\therefore \quad n_1 = \frac{1}{24}[1 + 3 + 12 + 8] = \frac{24}{24} = 1;$$

$$n_2 = \frac{1}{24}[2^6 + 3 \cdot 2^4 + 12 \cdot 2^3 + 8 \cdot 2^2]$$

$$= \frac{1}{24}[240] = 10;$$

$$n_3 = \frac{1}{24}[3^6 + 3 \cdot 3^4 + 12 \cdot 3^3 + 8 \cdot 3^2]$$

$$= \frac{1}{24}[1368] = 57;$$

$$n_4 = \frac{1}{24}[4^6 + 3 \cdot 4^4 + 12 \cdot 4^3 + 8 \cdot 4^2]$$

$$= \frac{1}{24}[5760] = 240;$$

$$n_5 = \frac{1}{24}[5^6 + 3 \cdot 5^4 + 12 \cdot 5^3 + 8 \cdot 5^2]$$

$$= \frac{1}{24}[19200] = 800;$$

$$n_6 = \frac{1}{24}[6^6 + 3 \cdot 6^4 + 12 \cdot 6^3 + 8 \cdot 6^2]$$

$$= \frac{1}{24}[53424] = 2226.$$

令 l_i = 用 i 种颜色对正六面体的六个面进行涂染所得不少于 i 种颜色的方案数。

$\therefore \quad l_1 = n_1 = 1;$

$$l_2 = n_2 - \binom{2}{1} l_1 = n_2 - 2l_1 = 10 - 2 = 8;$$

$$l_3 = n_3 - \binom{3}{2} l_2 - \binom{3}{1} l_1$$

$$= n_3 - 3l_2 - 3l_1 = 57 - 3 \times 8 - 3 = 30;$$

$$l_4 = n_4 - \binom{4}{3} l_3 - \binom{4}{2} l_2 - \binom{4}{1} l_1$$

$$= 240 - 120 - 48 - 4 = 68;$$

$$l_5 = n_5 - \binom{5}{4} l_4 - \binom{5}{3} l_3 - \binom{5}{2} l_2 - 5l_1$$

$$= 800 - 340 - 300 - 80 - 5 = 75;$$

$$l_6 = n_6 - \binom{6}{5} l_5 - \binom{6}{4} l_4 - \binom{6}{3} l_3 - \binom{6}{2} l_2 - 6l_1$$

$$= 2226 - 6 \times 75 - 15 \times 68 - 20 \times 30 - 15 \times 8 - 6$$

$$= 2226 - 450 - 1020 - 600 - 120 - 6 = 30$$

例 7. 在正 6 面体的每个面上任意作一条对角线，有多少种方案?

解: 因为在每个面上作一条对角线的方式有 2 种，所以可参照面 2 着色的思路，但是在图 4-6-7 中，顶面和底面上的对角线无

论怎么作，绕 xx' 转动 $\pm 90°$，都不会有不变的图象．绕另两个同类型轴转动 $\pm 90°$ 也有同样的问题．而绕其它类型的轴转动及绕 xx' 转动 $180°$都可等同于面的 2 着色。

于是不同的方案数

$$M = \frac{1}{24}[2^6 + 0 \cdot 6 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^4 + 6 \cdot 2^3 + 8 \cdot 2^2]$$
$$= 8.$$

其中 $0\cdot 6\cdot 2^3$ 这一项正是体现了上面所作的与面 2 着色不同之处的分析。

§7 母函数型的 Pólya 定理

前面介绍的 Pólya 定理主要用之于计数，在这一节里将把 Pólya 定理推广到母函数型式，它不仅可用于计数，还可以用之于对状态进行列举。

设有对象集合 (a_1, a_2, a_3, a_4)，用 (c_1, c_2, c_3) 三种颜色来涂染，每个对象着一色，比如 a_1 着 c_1 色，a_2 着 c_3 色，a_3 着 c_2 色，a_4 着 c_1 色。规定对象顺序是 $a_1a_2a_3a_4$，上述着色方案用 $c_1c_3c_2c_1$ 表示。

如果我们并不关心具体的对象涂染了什么颜色，只关心这方案用了哪些颜色，还可以把 $c_1c_3c_2c_1$ 写成 $c_1^2c_2c_3$。

例如用 b, g, r, y 四种颜色涂染三个同样的球，所有方案可写为 $(b+g+r+y)^3$，由于三个球无区别，故乘法是可交换。

$$\begin{aligned}(b+g+r+y)^3 = {} & b^3 + g^3 + r^3 + y^3 + 3b^2g + 3b^2r \\ & + 3b^2y + 3g^2b + 3g^2r + 3g^2y + 3r^2b + 3r^2g + 3r^2y \\ & + 3y^2g + 3y^2r + 3y^2b + 6bgr + 6bgy \\ & + 6brg + 6gry.\end{aligned}$$

展开式中的文字项表示方案，系数为方案的数目。

可把上面这种方法用于 Pólya 定理。

设对 n 个对象用 m 种颜色 $b_1, b_2, \cdots, b_m$ 进行着色，对应于置换 a_i 的 k 阶循环因子，其中 k 个对象，同一颜色用了 k 次，故在

$$m = \frac{1}{|G|}\left[m^{c(a_1)} + m^{c(a_2)} + \cdots + m^{c(a_g)}\right]$$

中 $m^{c(a_i)}$ 项用

$$(b_1 + b_2 + \cdots + b_m)^{c_1(a_i)}(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_m^2)^{c_2(a_i)} \cdots (b_1^n + b_2^n + \cdots + b_m^n)^{c_n(a_i)}$$

取代得

$$P = \frac{1}{|G|}\left[s_1^{c_1(a_1)} s_2^{c_2(a_1)} \cdots s_n^{c_n(a_1)} + s_1^{c_1(a_2)} s_2^{c_2(a_2)} \cdots s_n^{c_n(a_2)} + \cdots + s_1^{c_1(a_g)} s_2^{c_2(a_g)} \cdots s_n^{c_n(a_g)}\right].$$

其中

$$s_k = (c_1^k + c_2^k + \cdots + c_m^k),\ k = 1, 2, \cdots, n.$$

例 1. 有三种不同颜色的珠子，有它装成四个珠子的项链，问有哪些方案?

见图 4-7-1，使之重合的运动有关于圆环中心旋转 $\pm 90°$ 和

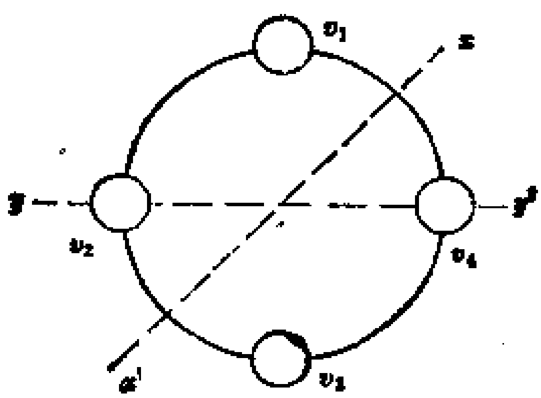


图 4-7-1

180°;有关于 xx' 和 yy' 轴翻转 180°。故有置换群 G 为

$$(v_1)(v_2)(v_3)(v_4),(v_2)(v_4)(v_1\ v_3),$$
$$(v_1\ v_2\ v_3\ v_4),(v_1)(v_3)(v_2\ v_4),$$
$$(v_1\ v_3)(v_2\ v_4),(v_1\ v_4)(v_2\ v_3),$$
$$(v_4\ v_3\ v_2\ v_1),(v_1\ v_2)(v_3\ v_4).$$

其中格式为

$(1)^4$的一个,$(4)^1$ 的两个,$(2)^2$ 的 3 个,$(1)^2(2)$ 的两个。根据 Pólya 定理不同方案数为

$$m=\frac{1}{8}(3^4+2\cdot 3+3\cdot 3^2+2\cdot 3^3)=21.$$

具体的方案是

$$\begin{aligned}P=&\frac{1}{8}[(b+g+r)^4+2(b^4+g^4+r^4)+3(b^2\\&+g^2+r^2)^2+2(b^2+g^2+r^2)(b+g+r)^2]\\=&b^4+r^4+g^4+b^3r+b^3g+br^3+r^3g+bg^3+rg^3\\&+2b^2r^2+2b^2g^2+2r^2g^2+2b^2rg+2br^2g+2brg^2.\end{aligned}$$

其中 b^2rg 的系数为 2,即由两颗蓝色珠子，一红一绿组成的方案有 2。即

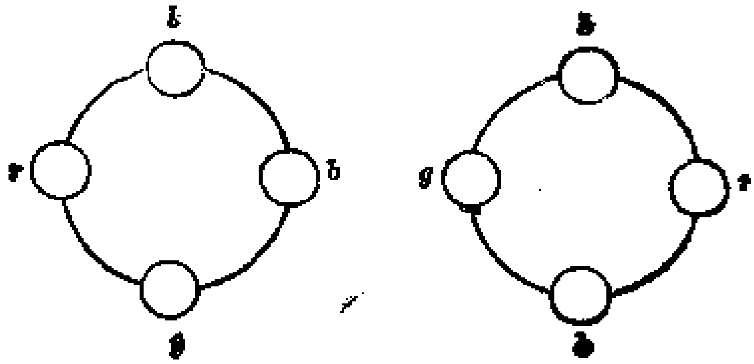


图 4-7-2

例 2. 由四颗红色的珠嵌在正六面体的四个角，试求有多少种方案?

问题相当于用两种颜色对正六面体的顶点着色，求两种颜色相等的方案数。从§5 的例 5 可知，置换群的阶数=24，其中格式为$(1)^8$ 的 1 个，$(4)^2$ 的 6 个，$(2)^4$ 的 9 个，$(1)^2(3)^2$ 的 8 个。

$$P = \frac{1}{24}[(b+r)^8 + 6(b^4+r^4)^2 + 9(b^2+r^2)^4 + 8(b+r)^2(b^3+r^3)^2],$$

其中 b^4r^4 的系数为

$$\frac{1}{24}[C(8,4) + 12 + 9C(4,2) + 8C(2,1)C(2,1)]$$

$$= \frac{1}{24}\left[\frac{8\times7\times6\times5}{4!} + 12 + 9\,\frac{4\times3}{2!} + 32\right]$$

$$= \frac{1}{24}[70 + 12 + 54 + 32] = \frac{168}{24} = 7.$$

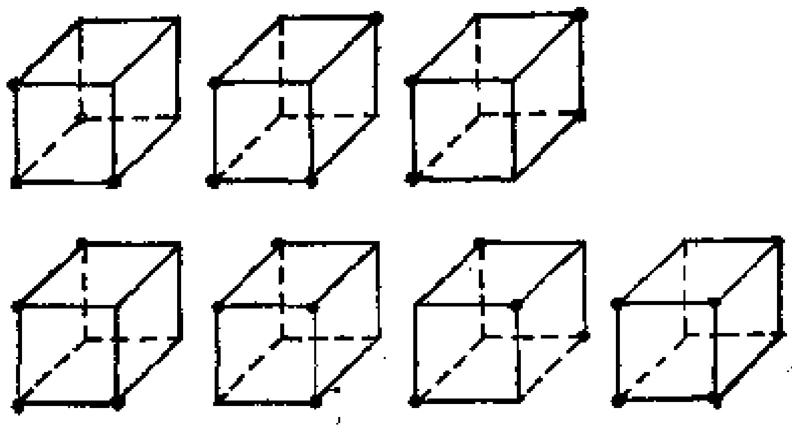


图 4-7-3

例 3. §6 例 6 的求骰子的不同方案数，尚可用母函数型 Pólya 定理解之如下:

$$\rho = \frac{1}{24}[(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6)^6$$
$$+ 6(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6)^2$$
$$\times (x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 + x_5^4 + x_6^4)$$
$$+ 3(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6)^2$$
$$\times (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2)^2$$
$$+ 6(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2)^3$$
$$+ 8(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 + x_5^3 + x_6^3)^2].$$

求其中 $x_1x_2x_3x_4x_5x_6$ 项系数，该项只能出现在

$$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6)^6$$

中，即为 6!。故不同骰子的方案数为 $6!/24 = 30$。

§8 图的计数

Pólya 计数定理可以用来对图进行计数。

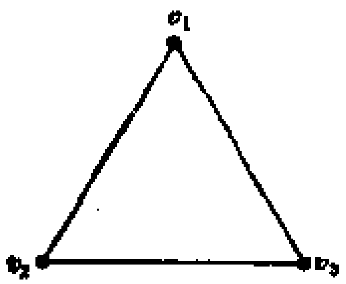


图 4-8-1

同形的两个图形算是一个图形，问 n 个顶点的简单图有多少个不同形的图形？这就是这一节要讨论的内容。

简单图指的是过两个顶点没有多于一条的边，而且不存在圈的图形。问题相当于对 n 个无标志顶点的完全图的 $\frac{n}{2}(n-1)$ 条边，用两种颜色进行着色，求不同方案数的问题。比如两种颜色 x, y，令着上色 y 的边从图中消去，得一 n 个顶点的简单图，从母函数型式的 Pólya 定理可以得知不同形的简单图形的数目，举例如下。

例 1. 三个顶点的无向图，从§6 例 1 知

$$G=\{(v_1)(v_2)(v_3),(v_1v_2v_3),(v_3v_2v_1),(v_1)(v_2v_3),\\(v_2)(v_1v_3),(v_3)(v_1v_2)\}.$$

$$P(x,y)=\frac{1}{6}[(x+y)^3+3(x+y)\times(x^2+y^2)\\+2(x^3+y^3)]=x^3+y^3+xy^2+x^2y.$$

从 $P(x,y)$ 可知对图 4-8-1 的边着色，其中三条边都着以色 x 的有 1；同样两条边，或一条边，或无一边着色 x 的方案各 1. 把着以色 y 的边消除得：

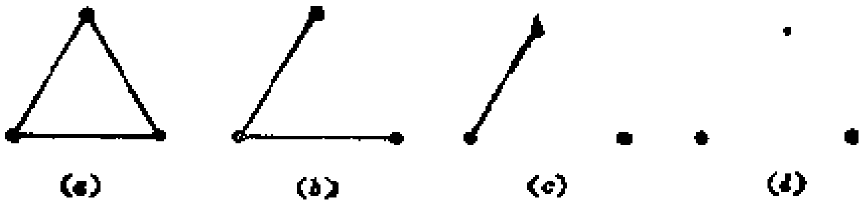


图 4-8-2

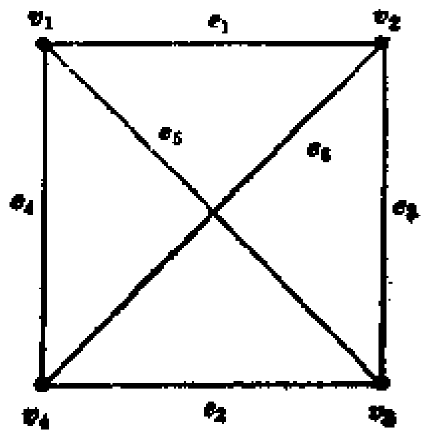


图 4-8-3

例 2. 图 4-8-3 的关于顶点的置换群为对称群 S_4. 因

$$e_1=(v_1,v_2),\ e_2=(v_3,v_4),\ e_3=(v_2,v_3),$$
$$e_4=(v_1,v_4),\ e_5=(v_1,v_3),\ e_6=(v_2,v_4).$$

下面观察在 S_4 作用下，e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6 的变换。例如对应于置换 (v_1v_2)，即对应于置换 $(v_1v_2)(v_3)(v_4)$，$e_1=(v_1,v_2)$ 不变，$e_2=(v_3,v_4)$ 不变。但 $e_3=(v_2,v_3)$ 变为 $e_5=(v_1,v_3)$；$e_4=(v_1,v_4)$ 被 $e_6=(v_2,v_4)$ 所取代。故有 (v_1v_2) 对应于边的置换

$$\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\ e_1 & e_2 & e_5 & e_6 & e_3 & e_4 \end{pmatrix} = (e_1)(e_2)(e_3e_5)(e_4e_6).$$

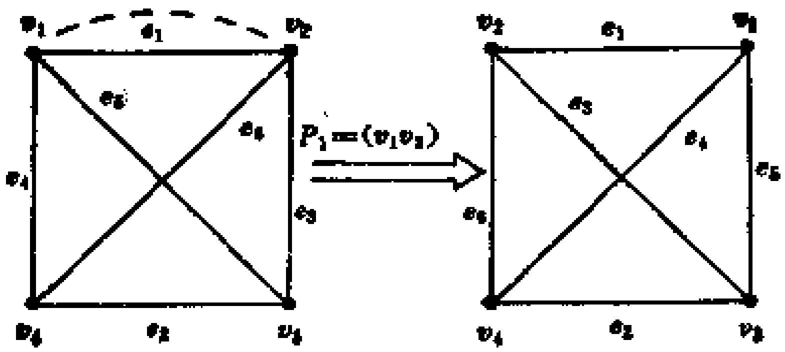


图 4-8-4

下面把群 s_4 所对应的置换列于表 4-8-1 中。

从表 4-8-1 可知 G_6 群格式为$(1)^6$的一个，$(1)^2(2)^2$ 的 9 个，(2)(4)的 6 个，$(3)^2$ 的 8 个。

故依据母函数型式的 Pólya 定理得

$$\begin{aligned} P(x,y) = \frac{1}{24}[&(x+y)^6 + 9(x+y)^2(x^2+y^2)^2 \\ &+ 8(x^3+y^3)^2 + 6(x^2+y^2)(x^4+y^4)] \\ = x^6 &+ x^5y + 2x^4y^2 + 3x^3y^3 + 2x^2y^4 + xy^5 + y^6. \end{aligned}$$

对应的图象如图 4-8-5。

表 4-8-1

	S_4	G_6
1	$(v_1)(v_2)(v_3)(v_4)$	$(e_1)(e_2)(e_3)(e_4)(e_5)(e_6)$
2	(v_1v_2)	$\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\ e_1 & e_2 & e_5 & e_6 & e_3 & e_4 \end{pmatrix}=(e_3e_5)(e_4e_6)(e_1)(e_2)$
3	(v_1v_3)	$\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\ e_3 & e_4 & e_1 & e_2 & e_5 & e_6 \end{pmatrix}=(e_1e_3)(e_2e_4)(e_5)(e_6)$
4	(v_1v_4)	$\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\ e_6 & e_5 & e_3 & e_4 & e_2 & e_1 \end{pmatrix}=(e_1e_6)(e_2e_5)(e_3)(e_4)$
5	(v_2v_3)	$\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\ e_5 & e_6 & e_3 & e_4 & e_1 & e_2 \end{pmatrix}=(e_1e_5)(e_2e_6)(e_3)(e_4)$
6	(v_2v_4)	$\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\ e_4 & e_3 & e_2 & e_1 & e_5 & e_6 \end{pmatrix}=(e_1e_4)(e_2e_3)(e_5)(e_6)$
7	(v_3v_4)	$\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\ e_1 & e_2 & e_6 & e_5 & e_4 & e_3 \end{pmatrix}=(e_1)(e_2)(e_3e_6)(e_4e_5)$
8	$(v_1v_2v_3)$	$\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\ e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_1 & e_2 \end{pmatrix}=(e_1e_3e_5)(e_2e_4e_6)$
9	$(v_1v_2v_4)$	$\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\ e_6 & e_5 & e_2 & e_1 & e_3 & e_4 \end{pmatrix}=(e_1e_6e_4)(e_2e_5e_3)$
10	$(v_1v_3v_2)$	$\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\ e_5 & e_6 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{pmatrix}=(e_1e_5e_3)(e_2e_6e_4)$
11	$(v_2v_3v_4)$	$\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\ e_3 & e_4 & e_6 & e_5 & e_1 & e_2 \end{pmatrix}=(e_1e_3e_6)(e_2e_4e_5)$
12	$(v_1v_4v_2)$	$\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\ e_4 & e_3 & e_5 & e_6 & e_2 & e_1 \end{pmatrix}=(e_1e_4e_6)(e_2e_3e_5)$

续表 4-8-1

	S_4	G_6
13	$(v_1v_4v_3)$	$\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\ e_6 & e_5 & e_1 & e_2 & e_4 & e_3 \end{pmatrix}=(e_1e_6e_3)(e_2e_5e_4)$
14	$(v_2v_3v_4)$	$\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\ e_5 & e_6 & e_2 & e_1 & e_4 & e_3 \end{pmatrix}=(e_1e_5e_4)(e_2e_6e_3)$
15	$(v_2v_4v_3)$	$\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\ e_4 & e_3 & e_6 & e_5 & e_1 & e_2 \end{pmatrix}=(e_1e_4e_5)(e_2e_3e_6)$
16	$(v_1v_2v_3v_4)$	$\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\ e_3 & e_4 & e_2 & e_1 & e_6 & e_5 \end{pmatrix}=(e_1e_3e_2e_4)(e_5e_6)$
17	$(v_1v_2v_4v_3)$	$\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\ e_6 & e_5 & e_4 & e_3 & e_1 & e_2 \end{pmatrix}=(e_1e_6e_2e_5)(e_3e_4)$
18	$(v_1v_3v_2v_4)$	$\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\ e_2 & e_1 & e_6 & e_5 & e_3 & e_4 \end{pmatrix}=(e_1e_2)(e_3e_6e_4e_5)$
19	$(v_1v_3v_4v_2)$	$\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\ e_5 & e_6 & e_4 & e_3 & e_2 & e_1 \end{pmatrix}=(e_1e_5e_2e_6)(e_3e_4)$
20	$(v_1v_4v_2v_3)$	$\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\ e_2 & e_1 & e_5 & e_6 & e_4 & e_3 \end{pmatrix}=(e_1e_2)(e_3e_5e_4e_6)$
21	$(v_1v_4v_3v_2)$	$\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\ e_4 & e_3 & e_1 & e_2 & e_6 & e_5 \end{pmatrix}=(e_1e_4e_2e_3)(e_5e_6)$
22	$(v_1v_2)(v_3v_4)$	$\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\ e_1 & e_2 & e_4 & e_3 & e_6 & e_5 \end{pmatrix}=(e_1)(e_2)(e_3e_4)(e_5e_6)$
23	$(v_1v_3)(v_2v_4)$	$\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\ e_2 & e_1 & e_4 & e_3 & e_5 & e_6 \end{pmatrix}=(e_1e_2)(e_3e_4)(e_5)(e_6)$
24	$(v_1v_4)(v_2v_3)$	$\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\ e_2 & e_1 & e_3 & e_4 & e_6 & e_5 \end{pmatrix}=(e_1e_2)(e_3)(e_4)(e_5e_6)$

对应的图象

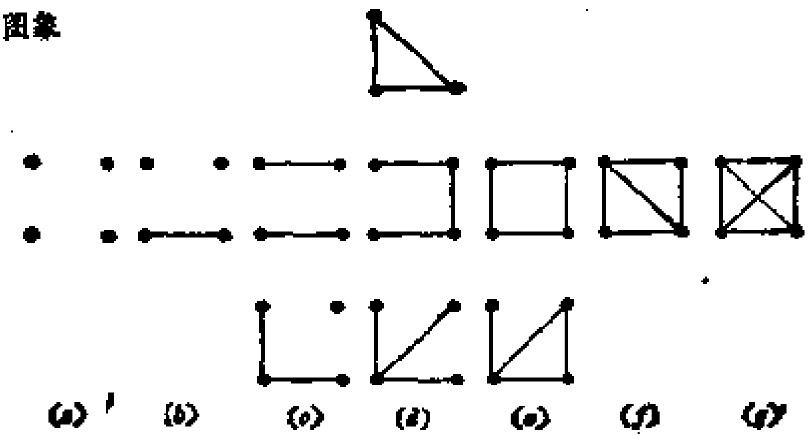


图 4-8-5

例 3. 求四个顶点的有向图的不同图象有多少种?

和上例不同的是四个顶点的有向图的边不是 6 条，而是 12 条。

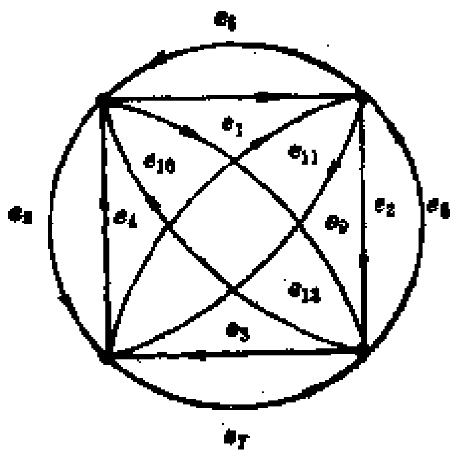


图 4-8-6

和上例相类似，可以从 S_4 导出关于 $e_1, e_2, \cdots\cdots, e_{12}$ 的 24 阶置换群，其格式为 $(1)^{12}$ 的一个，$(1)^2(2)^5$ 的 6 个，$(3)^4$ 的 8 个，$(2)^6$

的 3 个，$(4)^3$ 的 6 个。

根据 Pólya 定理可得

$$P(x,y)=\frac{1}{24}[(x+y)^{12}+6(x+y)^2(x^2+y^2)^5+8(x^3+y^3)^4+3(x^2+y^2)^6+6(x^4+y^4)^3]$$

$$=x^{12}+x^{11}y+5x^{10}y^2+13x^9x^3+27x^8y^4+38x^7y^5+48x^6y^6+38x^5y^7+27x^4y^8+13x^3y^9+5x^2y^{10}+xy^{11}+y^{12}.$$

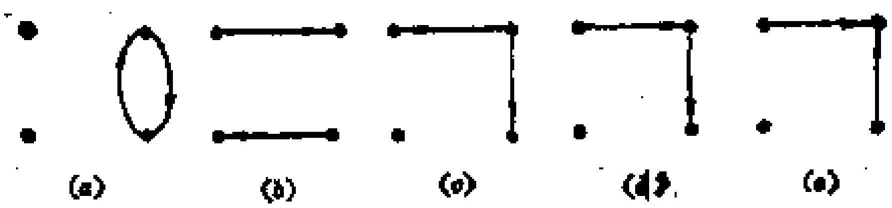


图 4-8-7

其中 x^2y^{10} 的系数为 5，即有两条边的四个顶点的有向图有 5 种，如图 4-8-7。

习 题

1. 试证(4-2-2)对应关系是同构。

2. 试证对于有限群 G 的任一元素 a，存在一整数 r，使得

$$a^r=e,$$

而且 r 必能整除 g，g 是群 G 的阶。

3. 试证下列函数对于运算 $f\cdot g=f(g(x))$ 是一个群。

$$f_1(x)=x,\quad f_2(x)=\frac{1}{x},\quad f_3(x)=1-x,$$

$$f_4(x)=\frac{1}{1-x},\quad f_5(x)=\frac{x-1}{x},\quad f_6(x)=\frac{x}{x-1}.$$

4.一正立方体的六个面用 g,r,b,y 四种颜色涂染，求其中两个面用色 g，两个面用色 y，其余一面用 b，一面用 r 的方案数.

5.对一正六面体的八个顶点,用 y 和 r 两种颜色染色，使其中有 5 个顶点用色 y，其余 3 个顶点用色 r，求其方案数.

6.由 b、r、g 三种颜色的 5 颗珠子镶成的圆环，共有几种不同的方案？

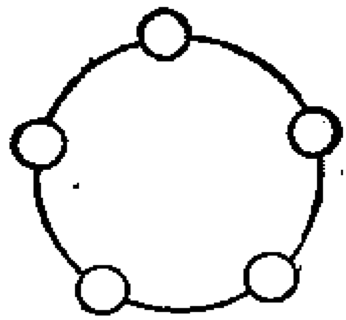


图 4-1

7.一个圆圈上有 n 个珠,用 n 种颜色对这 n 个珠子着色，要求颜色数目不少于 n 的方案数，

8.若已给两个 r 色的球,两个 b 色的球,用它装在正六面体的顶点,试问有多少不同的方案？

9.试说明 S_4 群的不同格式及其个数.

10.图 4-4-1 用两种颜色着色的问题，若考虑互换颜色使之一致的方案属同一类,问有多少不同的图象？

11.在正 4 面体的每个面上都任意引一条高,有多少方案？

12.一幅正方形的肖像与一个立方体的面一样大。6 幅相同的肖像贴在立方体的 6 个面上有多少种贴法？

13.凸多面体中与一个顶点相关的各面角之和与 2π 的差称为该顶点的欠角. 证明凸多面体各顶点欠角之和为 4π.

14.足球由正 5 边形与正 6 边形相嵌而成.

(a) 一个足球由多少块正 5 边形与正 6 边形组成？

(b) 把一个足球所有的正 6 边形都着以黑色,正 5 边形则着以其它各色,每个 5 边形的着色都不同,有多少种方案？

15.(a) 本质上有多少种确实是2个输入端的布尔电路？写出其布尔表达式。

(b) 本质上有多少种确实是3个输入端的布尔电路？

16.用8个相同的骰子垛成一个正6面体，有多少方案？

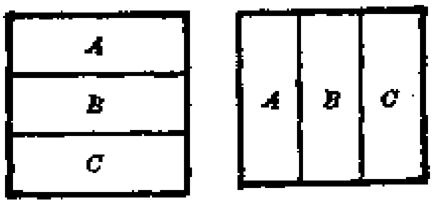
17.正六面体的六个面和八个顶点分别用红、蓝两种颜色的珠子嵌入，试问有多少种不同的方案数？(旋转使之一致的方案看作是相同的)。

第五章　区组设计与编码

§1 拉　丁　方

1. 问题的提出

设有一块地用作某一作物的 A, B, C 三种不同品种的试验田．若该地划分成如图 5-1-1 的 $(a),(b)$，则可能由于自然条件的差异，使试验不准确．较合理的试验方案如图 5-1-2，其特点是每行、每列都有一个 A, B, C。



(a)　　(b)

图　5-1-1

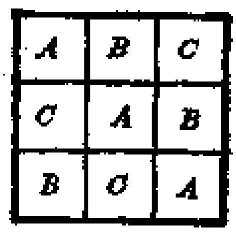


图　5-1-2

又如治某种病的六种药 $d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6$ 给六位病人进行试验，疗程为一个星期．若采用表 5-1-1 最简单的方案，其缺点是后服的药的疗效可能要好一些，因为前面服过的药已起作用．如若改为每人在 6 天中只服一种药，同样也存在缺点．可能有的药对某些病人有效，对另一些病人却无效．

理想的方案是在这 6 天中每人都对这 6 种药进行试验，每天都有这 6 种药对六个人进行试验，而不是要么同一天里只作一种

表 5-1-1

药量 / 人	一	二	三	四	五	六
m_1	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6
m_2	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6
m_3	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6
m_4	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6
m_5	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6
m_6	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6

药的试验，要么一个人只对一种药作试验. 自然导至构造一 6×6 的矩阵，可以把以上的讨论推广到由元素 $1,2,\cdots,n$ 构成的 $n\times n$ 方阵 $(a_{ij})_{n\times n}$，要求每行、每列中 $1,2,\cdots,n$ 各出现一次。这样的方阵就叫做拉丁方。

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

2. 正交的拉丁方

从著名的 36 名军官问题谈起. 分别由 6 个地区来的，6 个不同军衔的军官各一名，共 36 名. 现要让这 36 名军官排成 6×6 的方阵，使得每行、每列都有一名军官来自不同的地区，而且每行、每列都有 6 个军衔中的任一个.

每一名军官都有两个标志，一是军衔，一是来自的地区，即对应一对数偶 (i,j)，其中 i 为他的军衔的标志，j 为他的所在地区的标志，$i,j=1,2,\cdots,6$。

如果只要求每行、每列都各有一名军官来自 6 个不同的地区，不问其军衔如何，则问题为求一个 6×6 的拉丁方。如若只要求每行、每列都有 6 个军衔中的任何一个，而不管他来自什么地区，则问题又变成为求另一个 6×6 的拉丁方。36 名军官问题对应一由数偶 (i,j) 构成的 6×6 的方阵，其第一个数字构成了一个拉丁方，第二个数字构成另一个拉丁方，而且 36 对数偶 (i,j) 中每一对数偶都只出现一次。

定义： 设 $A_1=(a_{ij}^{(1)})_{n\times n}$，$A_2=(a_{ij}^{(2)})_{n\times n}$ 是两个 $n\times n$ 的拉丁方。如若矩阵

$$((a_{ij}^{(1)},a_{ij}^{(2)}))_{n\times n}$$

中的 n^2 个数偶 $(a_{ij}^{(1)},a_{ij}^{(2)})$ 互不相同，$i,j=1,2,\cdots,n$，则称 A_1 和 A_2 正交，或 A_1 和 A_2 是互相正交的拉丁方。

例：如

$$A_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{pmatrix},\quad A_2=\begin{pmatrix}1&3&2\\2&1&3\\3&2&1\end{pmatrix}$$

都是 3×3 的拉丁方，

$$\begin{pmatrix}(1,1)&(2,3)&(3,2)\\(2,2)&(3,1)&(1,3)\\(3,3)&(1,2)&(2,1)\end{pmatrix}$$

中 9 对数偶均不相同，故 A_1 和 A_2 是互相正交的。36 名军官问题实际上是求一对 6×6 的正交的拉丁方。并不是任意阶的正交拉丁方都是存在的，36 名军官问题就是不能解决的。

研究正交的拉丁方问题有着实际的意义，比如三种治发烧的药和三种治感冒的药配合，给三位病人进行疗效试验，要求在三天

内每人都服过这几种药，看哪一些配合疗效最好。这时就得用上上面讨论过的 3 阶的正交拉丁方。

3. 正交拉丁方的基本性质

定理： 互相正交的 n 阶拉丁方的个数不超过 $n-1$ 个.即若

$$A_1, A_2, \cdots, A_k$$

是两两正交的 n 阶拉丁方，则 $k \leqslant n-1$。

证： 设 $a_1a_2\cdots a_n$ 是$1,2,\cdots,n$ 的一个排列，$A_l=(a_{ij}^{(l)})_{n\times n}$，$l=1,2,\cdots,k$。若对 A_1 作如下的置换

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

得一方阵 $\overline{A}_1=\overline{(a_{ij}^{(1)})}_{n\times n}$。下面证 $\overline{A}_1$ 与 $A_2,\cdots,A_k$ 正交，如若不然，不妨设 $\overline{A}_1$ 不与 A_2 正交，则

$$((\overline{a_{ij}^{(1)}}, a_{ij}^{(2)}))_{n\times n} \qquad (5\text{-}1\text{-}1)$$

中至少有一对数偶出现的次数超过 1 次。设该对数偶为(a_l,a_m)，(a_l,a_m) 在(5-1-1)的矩阵中出现不只一次，说明数偶(l,m) 在

$$((a_{ij}^{(1)}, a_{ij}^{(2)}))_{n\times n}$$

中出现的次数超过 1 次，这跟 A_1 和 A_2 互相正交的假定矛盾。

这就证明了可以对拉丁方 A_1 作任一置换

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

得另一拉丁方 $\overline{A}_1$ 以取代 A_1，不改变 $\overline{A}_1,A_2,\cdots,A_k$ 的相互正交性。$A_2,A_3,\cdots,A_k$ 也有类似的性质。根据这个道理，不妨假定 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 的第 1 行都是$(1\quad 2\cdots n)$，任取 $1\leqslant l<m\leqslant k$，则方阵

$$((a_{ij}^{(l)}, a_{ij}^{(m)}))_{n\times n}$$

的第 1 行都是 $((1,1)(2,2)\cdots(n,n))$。“1”不能在第 1 列中重复出现，故 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 的第 2 行第 1 列元素没有一个取“1”这个

数的，而且各不相同．如若不然 $a_{21}^{(l)}=a_{1j}^{(m)}=d$，则

$$((a_{ij}^{(l)},a_{ij}^{(m)}))_{n\times n}$$

中数偶 (d,d) 至少出现两次：一次是在第 1 行第 d 列，一次是第 2 行第 1 列，这与 A_l 与 A_m 互相正交的假设相矛盾．

由于 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 的第 2 行第 1 列元素不为 1 而互不相同，只能分别取 $2,3,\cdots,n$ 中的 1 个数，故 $k\leqslant n-1$． ∎

§2 域的概念

为了讨论正交的拉丁方的需要，引进域特别是有限域的概念．

定义： F 是至少含有两个元素的集合，对 F 的元素定义有"$+$"和"$\cdot$"两种运算，并满足以下 F_1,F_2,F_3 三个条件的代数系统 $\langle F,+,\cdot\rangle$ 称为域．

F_1：F 的元素关于"$+$"运算成交换群，设其单位元素为 0．

F_2：$F\backslash\{0\}$ 的元素关于"$\cdot$"运算成交换群．

F_3：分配律成立，即对于 $a,b,c\in F$ 有

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c,$$
$$(b+c)\cdot a=b\cdot a+c\cdot a.$$

例． 实数的全体、复数的全体关于通常的加法、乘法都是域，分别称为实数域和复数域．

F 集合的元素除去元素 0 以外关于乘法成交换群，其单位元素用 1 表示．在不引起混乱的情况下就用 0 和 1 分别表示 F 关于"$+$"，和 $F\backslash\{0\}$ 关"$\cdot$"运算构成的交换群的单位元素．

集合 F 的元素个数为有限时，称为有限域．

若 p 是素数，则 $F=\{0,1,2,\cdots,p-1\}$ 在 $\bmod p$ 的意义下关于加法"$+$"，乘法"$\cdot$"成域．

所谓 $\bmod p$ 意义下相等，指的是 $a=b \bmod p$，即 $a-b=sp$．

F 关于加法运算构成交换群，容易给予证明．要证明 $\{1,2,$

$\cdots, p-1\}$ 关于乘法运算构成交换群,只要证属于集合中的任一元素 a 存在逆元素就可以了. 由于 p 是素数, a 和 p 的公因子为 1. 故唯一地存在整数 b 和 c 使得

$$ab + pc = 1.$$

所以

$$ab = 1 \qquad \mathrm{mod}\, p.$$

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

b 就是 a 的逆元素.

·	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

上例验证了 $p=5$ 时, $F=\{0,1,2,3,4\}$在 mod5 的意义下关于“+”,“·”运算成域。

然而 p 不为素数时则不然,这只要从下面的例子便可看出. $p=6$ 时有

+	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

·	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	4	0	2	4
3	3	0	3	0	3
4	4	2	0	4	2
5	5	4	3	2	1

p是素数，则 $F=\{0,1,2,\cdots,p-1\}$在 mod p 的意义下，关于"+"，"·"运算构成的域用 $GF(p)$ 表示。

§3 Galois 域 $GF(p^n)$

系统地讨论 $GF(p^n)$ 域属于近世代数，下面仅仅简略地介绍。

1. 多项式

$p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_kx^k$, $a_i\in F$, $i=0,1,\cdots,k$.

如果 F 的元素个数为 p，则不同的多项式 $p(x)$个数为 p^{k+1}，即 $p(x)$和 $k+1$ 位 p 进制数 $a_ka_{k-1}\cdots a_2a_1a_0$ 一一对应。

例如 $F=GF(2)=\{0,1\}$，二次以下的多项式有

$$
\begin{aligned}
&p_{000}(x) = 0, && \\
&p_{001}(x) = 1, && \}\ 0\text{次} \\
&p_{010}(x) = x, && \\
&p_{011}(x) = 1 + x, && \}\ 1\text{次} \\
&p_{100}(x) = x^2, && \\
&p_{101}(x) = 1 + x^2, && \\
&p_{110}(x) = x + x^2, && \}\ 2\text{次} \\
&p_{111}(x) = 1 + x + x^2. &&
\end{aligned}
$$

若 p 是素数，系数在 $GF(p)$ 中的多项式集合用 $GF[p,x]$ 表之。若 $p(x)$ 和 $q(x)$ 都是属于 $GF[p,x]$ 的两个多项式，而且 $p(x)$ 的次方高于 $q(x)$ 的次方，则存在属于 $GF[p,x]$ 的多项式 $s(x)$，$r(x)$，使得

$$p(x) = s(x)q(x) + r(x),$$

其中 $r(x)$ 的次方小于 $q(x)$ 的次方。多项式 $r(x)$ 称为是多项式 $p(x)$ 除以 $q(x)$ 的余项。

如果 $p(x)$ 不能表以属于 $GF[p,x]$ 的两个非常数的多项式 $s(x)$，$q(x)$ 之积，则称 $p(x)$ 在 $GF[p,x]$ 上是不可化约的。

如若 $p(x)$，$s(x)$，$q(x)$ 都是属于 $GF[p,x]$ 的多项式，而且等式

$$p(x) = s(x)q(x)$$

成立，则称 $s(x)$，$q(x)$ 是多项式 $p(x)$ 的因子。

和整数相似可证：如若 $p(x)$ 和 $q(x)$ 互素，即不存在除了 1 以外的公因子，则存在多项式 $a(x)$，$b(x)$，使得

$$a(x)p(x) + b(x)q(x) = 1.$$

设 $m(x)$ 是系数在 $GF(p)$ 的在 $GF[p,x]$ 上不可化约的 n 次多项式，则 $GF[p,x]$ 在 mod $m(x)$ 的意义下分成若干个同余类，这些同余类的全体用 $GF[p,m(x)]$ 表之。则关于通常意义的多项式的"+"和"·"运算，$GF[p,m(x)]$ 构成一元素个数为 p^n 的

域，用 $GF(p^n)$ 表示。

证明留给读者作为练习。

例. $m(x)=x^3+x+1$ 在 $GF[2,x]$ 上是不可化约的多项式。$GF[2,x]$ 的全体 $\bmod m(x)$ 的同余类为

$\{0,1,x,1+x,x^2,1+x^2,x+x^2,1+x+x^2\}$，如表5-3-1。

表 5-3-1

$\cdot$	1	x	$1+x$	x^2	$1+x^2$	$x+x^2$	$1+x+x^2$
1	1	x	$1+x$	x^2	$1+x^2$	$x+x^2$	$1+x+x^2$
x	x	x^2	$x+x^2$	$1+x$	1	$1+x+x^2$	$1+x^2$
$1+x$	$1+x$	$x+x^2$	$1+x^2$	$1+x+x^2$	x^2	1	x
x^2	x^2	$1+x$	$1+x+x^2$	$x+x^2$	x	$1+x^2$	1
$1+x^2$	$1+x^2$	1	x^2	x	$1+x+x^2$	$1+x$	$x+x^2$
$x+x^2$	$x+x^2$	$1+x+x^2$	1	$1+x^2$	$1+x$	x	x^2
$1+x+x^2$	$1+x+x^2$	$1+x^2$	x	1	$x+x^2$	x^2	$1+x$

由于 $\bmod(1+x+x^3)$，故有

$$x^3=1+x,$$
$$x^4=x+x^2,$$
$$x^5=1+x+x^2,$$
$$x^6=1+x^2,$$
$$x^7=1.$$

可见 $\{0,1,x,1+x,x^2,1+x^2,x+x^2,1+x+x^2\}$ 构成一个 2^3 个元素的域 $GF[2,1+x+x^3]$。

定理： 若 α 是 $GF[p,m(x)]$ 的非零元素，则

$$\alpha^{p^n-1}=1.$$

证： 令 $p^n-1=k$，设属于 $GF[p,m(x)]$ 的 k 个非零元素为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$。$\alpha$ 为其中任一元素，则

$$\alpha\alpha_1, \alpha\alpha_2, \cdots, \alpha\alpha_k$$

互不相同，否则设

$$\alpha\alpha_i = \alpha\alpha_j,$$

$$\alpha(\alpha_i - \alpha_j) = 0, \quad \alpha_i = \alpha_j.$$

故

$$\prod_{i=1}^{k}(\alpha\alpha_i) = \alpha^k \prod_{i=1}^{k} \alpha_i = \prod_{i=1}^{k} \alpha_i,$$

即

$$(\alpha^k - 1)\prod_{i=1}^{k} \alpha_i = 0,$$

$$\therefore \ \alpha^k = 1.$$

定理： 若 $0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ 是 $GF[p, m(x)]$ 的全体元素，则在 $GF[p, m(x)]$ 中有

$$x^{p^n} - x = x(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_k).$$

证从略。

§4 正交的拉丁方

定理： $n = p^\alpha$，且 $n \geqslant 3$，其中 p 是一个素数，α 是正整数，则存在 $n-1$ 个互相正交的 n 阶的拉丁方。

证： 证明的过程实际上是提供构造这 $n-1$ 个正交的 n 阶拉丁方的方法。设 $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}$ 是 $GF(p^\alpha)$ 的元素，其中 α_0 是 0，$\alpha_{n-1} = 1$。

构造 $n \times n$ 的矩阵 $A_1, A_2, \cdots, A_{n-1}$ 如下。设

$$A_k = (a_{ij}^{(k)})_{n\times n}, \quad k = 1, 2, \cdots, n-1.$$

$$a_{ij}^{(k)} = \alpha_k \cdot \alpha_i + \alpha_j, \quad i, j = 1, 2, \cdots, n;$$

$$k = 1, 2, \cdots, n-1.$$

其中“+”，“·”分别是 $GF(p^\alpha)$ 域的“加”和“乘”法运算。下面首先

证 $A_1, A_2, \cdots, A_{n-1}$ 是拉丁方。如若不然，设 A_k 中第 i 行有两个元素相同，设

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ih}^{(k)},$$

即
$$\alpha_k \cdot \alpha_i + \alpha_j = \alpha_k \cdot \alpha_i + \alpha_h,$$

即
$$\alpha_j = \alpha_h,$$

$$\therefore \quad j = h.$$

如若 A_k 中第 j 列有两个元素相同，设

$$a_{hj}^{(k)} = a_{ij}^{(k)},$$

则
$$\alpha_k \cdot \alpha_h + \alpha_j = \alpha_k \cdot \alpha_i + \alpha_j,$$

$$\alpha_k \cdot (\alpha_h - \alpha_i) = 0,$$

$$\therefore \alpha_h = \alpha_i, \quad h = i.$$

下面证 $A_1, A_2, \cdots, A_{n-1}$ 互相正交。设 A_g, A_h 是其中两个拉丁方，但 A_g 和 A_h 不相正交，存在

$$(a_{ij}^{(g)}, a_{ij}^{(h)}) = (a_{fk}^{(g)}, a_{fk}^{(h)}),$$

则

$$\alpha_g \cdot \alpha_i + \alpha_j = \alpha_g \cdot \alpha_f + \alpha_k, \tag{5-4-1}$$

$$\alpha_h \cdot \alpha_i + \alpha_j = \alpha_h \cdot \alpha_f + \alpha_k, \tag{5-4-2}$$

(5-4-1)与(5-4-2)相减得

$$(\alpha_g - \alpha_h) \cdot \alpha_i = (\alpha_g - \alpha_h) \cdot \alpha_f.$$

由于 $\alpha_g \neq \alpha_h$，故 $\alpha_i = \alpha_f$，$i = f$。

代入(5-4-1)得

$$\alpha_j = \alpha_k, \quad j = k. \qquad \blacksquare$$

设 $A_1, A_2, \cdots A_k$ 是一组 n_1 阶的正交拉丁方，$B_1, B_2, \cdots, B_k$ 是另一组 n_2 阶的正交拉丁方。构造一组 k 个 $n_1 n_2$ 阶的矩阵如下，

$$C_r = \begin{bmatrix} (a_{11}^{(r)}, B_r) & (a_{12}^{(r)}, B_r) & \cdots & (a_{1n_1}^{(r)}, B_r) \\ (a_{21}^{(r)}, B_r) & (a_{22}^{(r)}, B_r) & \cdots & (a_{2n_1}^{(r)}, B_r) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ (a_{n_1 1}^{(r)}, B_r) & (a_{n_1 2}^{(r)}, B_r) & \cdots & (a_{n_1 n_1}^{(r)}, B_r) \end{bmatrix}, \tag{5-4-3}$$

$$r = 1,2,\cdots,k.$$

其中 $(a_{ij}^{(r)}, B_r)$ 是 $n_2 \times n_2$ 的矩阵,其第 k 行第 l 列元素为 $(a_{ij}^{(r)}, b_{kl}^{(r)})$, $k = 1,2,\cdots,n_2$; $l = 1,2,\cdots,n_2$.

设

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

即 A_1、A_2 是两个 3×3 的正交的拉丁方; B_1、B_2 是另一组 4×4 的正交的拉丁方,则可形成另一组 12×12 的方阵:

$$C_1 = \begin{bmatrix} (3,B_1) & (2,B_1) & (1,B_1) \\ (2,B_1) & (1,B_1) & (3,B_1) \\ (1,B_1) & (3,B_1) & (2,B_1) \end{bmatrix},$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} (3,B_2) & (1,B_2) & (2,B_2) \\ (2,B_2) & (3,B_2) & (1,B_2) \\ (1,B_2) & (2,B_2) & (3,B_2) \end{bmatrix},$$

其中

$$(3,B_1) = \begin{bmatrix} (3,4) & (3,3) & (3,2) & (3,1) \\ (3,3) & (3,4) & (3,1) & (3,2) \\ (3,2) & (3,1) & (3,4) & (3,3) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) \end{bmatrix},$$

$$(3,B_2) = \begin{bmatrix} (3,4) & (3,2) & (3,1) & (3,3) \\ (3,3) & (3,1) & (3,2) & (3,4) \\ (3,2) & (3,4) & (3,3) & (3,1) \\ (3,1) & (3,3) & (3,4) & (3,2) \end{bmatrix},$$

其余依此类推。

若分别对此 12 个数偶给以从 1 到 12 的标号，便得两个 12 × 12 的拉丁方。

定理： 由 (5-4-3) 给出的 $C_1, C_2, \cdots, C_r$ 是一组 $(n_1n_2)\times(n_1n_2)$ 的正交拉丁方。

证： 先证明 $C_1,C_2,\cdots,C_k$ 是拉丁方，根据矩阵 C_i 的构造，它的每一行、每一列的数偶不是第一个分量不相同，就是其第二个分量不一样，因此每行、每列的元素都不相同。这就证明了所得的矩阵 $C_1,C_2,\cdots,C_k$ 是拉丁方。

下面证明 $C_1,C_2,\cdots,C_k$ 两两互相正交。如其不然，设其中有 C_g,C_h 不是互相正交。则存在 i,j,f,l,p,q,r,s 使得

$$((a_{ij}^{(g)},b_{fl}^{(g)}),(a_{ij}^{(h)},b_{fl}^{(h)}))=((a_{pq}^{(g)},b_{rs}^{(g)}),(a_{pq}^{(h)},b_{rs}^{(h)})).$$

$$\therefore\ (a_{ij}^{(g)},b_{fl}^{(g)})=(a_{pq}^{(g)},b_{rs}^{(g)}), \tag{5-4-4}$$

$$(a_{ij}^{(h)},b_{fl}^{(h)})=(a_{pq}^{(h)},b_{rs}^{(h)}). \tag{5-4-5}$$

然而 A_g,A_h,B_g,B_h 是拉丁方，故由(5-4-4)，(5-4-5)得

$$a_{ij}^{(g)}=a_{pq}^{(g)},\quad a_{ij}^{(h)}=a_{pq}^{(h)},$$

$$\therefore\ i=p,\ j=q.$$

$$b_{fl}^{(g)}=b_{rs}^{(g)},\quad b_{fl}^{(h)}=b_{rs}^{(h)},$$

$$\therefore\ f=r,\ l=s.$$

§5 均衡不完全的区组设计 (BIBD)

1. 基本性质

令 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_v\}$。所谓 X 的均衡的不完全的区组设计，指的是由 X 中的一子集构成一组，共得 b 组，设为 $\{B_1,B_2,\cdots,B_b\}$，每组 k 个元素，并满足以下的条件：

(a) X 的每一元素在 b 组中正好出现 r 次；

(b) 任意一对元素在 b 组中正好同时出现 λ 次；

(c) $k < v$.

均衡不完全的区组设计以后简记为 BIBD，即为 Balanced Incomplete Block Design 的缩写。

例 1. $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, \cdots, x_9\}, b = 12, k = 3, r = 4, \lambda = 1, v = 9$.

B_1: x_1, x_2, x_3; B_2: x_4, x_5, x_6; B_3: x_7, x_8, x_9;

B_4: x_1, x_4, x_7; B_5: x_2, x_5, x_8; B_6: x_3, x_6, x_9;

B_7: x_1, x_5, x_9; B_8: x_2, x_6, x_7; B_9: x_3, x_4, x_8;

B_{10}: x_1, x_6, x_8; B_{11}: x_2, x_4, x_9; B_{12}: x_3, x_5, x_7.

例 2. $v = b = 15, r = k = 7, \lambda = 3$.

B_1: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$;

B_2: $x_1, x_2, x_3, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}$;

B_3: $x_1, x_2, x_3, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}$;

B_4: $x_1, x_4, x_5, x_8, x_9, x_{12}, x_{13}$;

B_5: $x_1, x_4, x_5, x_{10}, x_{11}, x_{14}, x_{15}$;

B_6: $x_1, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{14}, x_{15}$;

B_7: $x_1, x_6, x_7, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}$;

B_8: $x_2, x_4, x_6, x_8, x_{10}, x_{12}, x_{14}$;

B_9: $x_2, x_4, x_7, x_8, x_{11}, x_{13}, x_{15}$;

B_{10}: $x_2, x_5, x_6, x_9, x_{11}, x_{12}, x_{15}$;

B_{11}: $x_2, x_5, x_7, x_9, x_{10}, x_{13}, x_{14}$;

B_{12}: $x_3, x_4, x_6, x_9, x_{11}, x_{13}, x_{14}$;

B_{13}: $x_3, x_4, x_7, x_9, x_{10}, x_{12}, x_{15}$;

B_{14}: $x_3, x_5, x_6, x_8, x_{10}, x_{13}, x_{15}$;

B_{15}: $x_3, x_5, x_7, x_8, x_{11}, x_{12}, x_{14}$.

X的元素为 v 个，从中取 k 个组成一组，可组成$\binom{v}{k}$组，不完全是针对这点而言。

b, v, r, k, λ 是一个 BIBD 的 5 个参数，有时就简记为 $(b, v,$

r,k,λ)—设计。

定理： (b,v,r,k,λ)—设计必须满足

$$bk=vr,\ r(k-1)=\lambda(v-1). \tag{5-5-1}$$

证： (1) 每组 k 个元素，共 b 组，bk 是元素出现的总数；集合 X 的 v 个元素，每个元素在这 b 组中正好出现 r 次，vr 是出现次数的总和。故

$$bk=vr.$$

(2) 集合 X 中某一元素 x_1 出现在 r 组中，$r(k-1)$ 是这 r 组中 x_1 以外的元素出现的次数。x_1 与其余的 $v-1$ 个配合成对出现在 r 组中，每对同时出现 λ 次。故 X 中 x_1 以外的 $v-1$ 个元素出现在这 r 组中的次数应为 $\lambda(v-1)$。故得

$$r(k-1)=\lambda(v-1).$$

2. 区组矩阵

区组设计可用其区组矩阵 $A=(a_{ij})_{v\times b}$ 来描述，即

$$A=(a_{ij}),\ i=1,2,\cdots,v,\ j=1,2,\cdots,b.$$

其中

$$a_{ij}=\begin{cases}1, & x_i\in B_j,\\ 0, & x_i\notin B_j.\end{cases}$$

如本节的例 1 的区组矩阵为 A：

$$A=\begin{array}{c}\\ x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\x_6\\x_7\\x_8\\x_9\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccccccccccc}B_1&B_2&B_3&B_4&B_5&B_6&B_7&B_8&B_9&B_{10}&B_{11}&B_{12}\end{array}\\ \left[\begin{array}{cccccccccccc}
1&0&0&1&0&0&1&0&0&1&0&0\\
1&0&0&0&1&0&0&1&0&0&1&0\\
1&0&0&0&0&1&0&0&1&0&0&1\\
0&1&0&1&0&0&0&0&1&0&1&0\\
0&1&0&0&1&0&1&0&0&0&0&1\\
0&1&0&0&0&1&0&1&0&1&0&0\\
0&0&1&1&0&0&0&1&0&0&0&1\\
0&0&1&0&1&0&0&0&1&1&0&0\\
0&0&1&0&0&1&1&0&0&0&1&0
\end{array}\right]\end{array}.$$

定理： 对于 (b,v,r,k,λ) 一设计，下列等式成立，

$$AA^T=(r-\lambda)I+\lambda J, \tag{5-5-2}$$

其中 I 是 $v\times v$ 的单位矩阵，J 是所有元素均为1的 $v\times v$ 矩阵。

证： 令 $B=AA^T=(b_{ij})_{v\times v}$，则 b_{ij} 为矩阵 A 的第 i 行与第 j 行的内积，b_{ii} 为矩阵 A 的第 i 行中非零元素个数，故 $b_{ii}=r$。$i\neq j$ 时 $b_{ij}=\lambda$，即第 i 行与第 j 行中对应分量都等于1的个数等于 λ，说明 x_i 和 x_j 在 λ 组中同时出现。

$$\therefore\ AA^T=\begin{bmatrix} r & \lambda & \cdots & \lambda \\ \lambda & r & \cdots & \lambda \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda & \lambda & \cdots & r \end{bmatrix}=(r-\lambda)I+\lambda J. \ \blacksquare$$

定理： $b\geqslant v$。

证： 由于 $k\neq v$，$r(k-1)=\lambda(v-1)$，故 $r\neq\lambda$。

假定 $b<v$，区组矩阵 A 加上元素为0的 $v-b$ 列形成一 $v\times v$ 的方阵 A_1，而且

$$AA^T=A_1A_1^T.$$

$$\therefore\quad \det(AA^T)=\det(A_1A_1^T)=\det(A_1)\det(A_1^T).$$

然而 A_1 至少有一列全为零，故 $\det(A_1)=0$。

$$\therefore\ \det(AA^T)=0 \tag{5-5-3}$$

另一方面

$$\det(AA^T)=\begin{vmatrix} r & \lambda & \lambda & \cdots & \lambda \\ \lambda & r & \lambda & \cdots & \lambda \\ \lambda & \lambda & r & \cdots & \lambda \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda & \lambda & \lambda & \cdots & r \end{vmatrix},$$

右端行列式的第2列，第3列，…，第 v 列分别减以第1列得

$$\det(AA^T)=\begin{vmatrix} r & \lambda-r & \lambda-r & \cdots & \lambda-r \\ \lambda & r-\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda & 0 & r-\lambda & \cdots & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda & 0 & 0 & \cdots & r-\lambda \end{vmatrix},$$

把第 2 行，第 3 行，…，第 v 行加到第 1 行得

$$\det(AA^T)=\begin{vmatrix} r+(v-1)\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda & r-\lambda & \cdots & 0 \\ \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda & 0 & \cdots & r-\lambda \end{vmatrix}$$

$$=[r+(v-1)\lambda](r-\lambda)^{v-1}\neq 0, \quad (5\text{-}5\text{-}4)$$

与(5-5-3)相矛盾。 ∎

3. 对称的 BIBD

当 $b=v$ 时称这一 BIBD 是对称的。由于 $bk=vr$，故有 $k=r$。例如

B_1: x_1, x_2, x_4; B_2: x_2, x_3, x_5; B_3: x_3, x_4, x_6;

B_4: x_4, x_5, x_7; B_5: x_5, x_6, x_1; B_6: x_6, x_7, x_2;

B_7: x_7, x_1, x_3.

便是对称的，其中 $v=b=7, r=k=3, \lambda=1$。

本节例 2 也是一对称的 BIBD。

对称的 BIBD 有时便简记为 (v,k,λ) 一设计。

4. 区组设计的构成

区组设计的构成有许多方法，这一节将介绍其中相对比较简单的一种。

定理： 对称的 BIBD 的任意两组都正好有 λ 个共同的元素．

证： 由于 $b=v$，故区组矩阵 A 为 v 阶方阵，而且 $\det A \neq 0$，A 非奇异，故 A^{-1} 存在．

$$\begin{aligned} A^TA &= (A^{-1}A)(A^TA) = A^{-1}(AA^T)A \\ &= A^{-1}[(k-\lambda)I+\lambda J]A \\ &= (k-\lambda)A^{-1}IA+\lambda A^{-1}JA \\ &= (k-\lambda)I+\lambda A^{-1}JA. \end{aligned} \tag{5-5-5}$$

由于 $k=r$，矩阵 A 的每行每列都有 k 个 1，故

$$AJ=kJ=JA,\ A^{-1}JA=J. \tag{5-5-6}$$

以 $A^{-1}JA=J$ 代入(5-5-5)，得

$$A^TA=(k-\lambda)I+\lambda J \tag{5-5-7}$$

$$=\begin{bmatrix} k & \lambda & \lambda & \cdots & \lambda \\ \lambda & k & \lambda & \cdots & \lambda \\ & \cdots\cdots & & & \\ \lambda & \lambda & \lambda & \cdots & k \end{bmatrix}.$$

这就证明了对称的 BIBD 的任意两组都正好有 λ 个共同的元素．

定理： 若 $B_1,B_2,\cdots,B_v$ 是关于集合 $X=\{x_1,x_1,\cdots,x_v\}$ 的对称的 BIBD，则对于其中任一 B_i，下列 $v-1$ 个区组

$$B_1\backslash B_i,B_2\backslash B_i,B_{i-1}\backslash B_i,B_{i+1}\backslash B_i,\cdots,B_v\backslash B_i$$

构成一关于集合 $X\backslash B_i$ 的 BIBD．

证： 显然 $B_1\backslash B_i$，$B_2\backslash B_i$，$\cdots$，$B_v\backslash B_i$ 所包含的元素属于 $X\backslash B_i$．而集合 $X\backslash B_i$ 中的每一元素仍然存在于 k 组中，$X\backslash B_i$ 中每一对元素仍然同时出现 λ 次．根据前一定理可知 $B_1,B_2,\cdots,B_{i-1},B_{i+1},\cdots,B_v$ 中每一区组与 B_i 有 λ 个元素相同．故 $B_1\backslash B_i$，$B_2\backslash B_i,\cdots,B_{i-1}\backslash B_i,B_{i+1}\backslash B_i,\cdots,B_v\backslash B_i$ 含有 $k-\lambda$ 个元素．即 $B_1\backslash B_i,B_2\backslash B_i,\cdots,B_{i-1}\backslash B_i,B_{i+1}\backslash B_i,\cdots,B_v\backslash B_i$ 组成

$((v-1),(v-k),k,(k-\lambda),\lambda)$—设计． ■

定理： 若 $B_1, B_2, \cdots, B_v$ 是关于集合 $X=\{x_1, x_2, \cdots, x_v\}$ 的对称的 BIBD，B_i 是其中任意一个，则

$$B_1 \cap B_i, B_2 \cap B_i, \cdots, B_{i-1} \cap B_i, B_{i+1} \cap B_i, \cdots, B_v \cap B_i$$

构成关于集合 B_i 的 BIBD。

证： $B_1 \cap B_i, B_2 \cap B_i, \cdots, B_{i-1} \cap B_i, B_{i+1} \cap B_i, \cdots, B_v \cap B_i$ 包含有子集 B_i 中的元素；而且 B_i 中的元素只出现在其中的 $k-1$ 组中；B_i 中任意一对元素在这 $v-1$ 组中同时出现 $\lambda-1$ 次。同时，$B_1 \cap B_i$，$B_2 \cap B_i$，$\cdots$，$B_v \cap B_i$ 都包含有 λ 个元素。故 $B_1 \cap B_i, B_2 \cap B_i, \cdots, B_v \cap B_i$ 构成关于集合 B_i 的

$$((v-1), k, (k-1), \lambda, (\lambda-1))\text{—设计.} \quad ■$$

本章§5 的例 2 是一对称的 BIBD 的例子，其区组矩阵设为 A。

从该区组矩阵 A 中去掉第 1 列，以及第 1 列中元素不为 0 的

$A=$

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8	B_9	B_{10}	B_{11}	B_{12}	B_{13}	B_{14}	B_{15}
x_1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
x_2	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
x_3	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
x_4	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
x_5	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1
x_6	1	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0
x_7	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1
x_8	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	1
x_9	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0
x_{10}	0	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0
x_{11}	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1
x_{12}	0	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1
x_{13}	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0
x_{14}	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1
x_{15}	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0

所有的行便得关于集合$\{x_8, x_9, x_{10}, \cdots, x_{15}\}$的BIBD,即(14,8,7,4,3)—设计: $B_2\backslash B_1, B_3\backslash B_1, \cdots, B_{15}\backslash B_1$,如 A_1.

$A_1=$

	$B_2\backslash B_1$	$B_3\backslash B_1$	$B_4\backslash B_1$	$B_5\backslash B_1$	$B_6\backslash B_1$	$B_7\backslash B_1$	$B_8\backslash B_1$	$B_9\backslash B_1$	$B_{10}\backslash B_1$	$B_{11}\backslash B_1$	$B_{12}\backslash B_1$	$B_{13}\backslash B_1$	$B_{14}\backslash B_1$	$B_{15}\backslash B_1$
x_8	1	0	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	1
x_9	1	0	1	0	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0
x_{10}	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0
x_{11}	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1
x_{12}	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1
x_{13}	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0
x_{14}	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1
x_{15}	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0

类似可从A中去掉 B_1列,及 B_1列元素为0的所有的行,得关于 $B_1=\{x_1, x_2, \cdots, x_7\}$ 的一个 BIBD: $B_2\cap B_1$, $B_3\cap B_1$, $\cdots$, $B_{15}\cap B_1$,其区组矩阵如 A_2.

$A_2=$

	$B_2\backslash B_1$	$B_3\backslash B_1$	$B_4\backslash B_1$	$B_5\backslash B_1$	$B_6\backslash B_1$	$B_7\backslash B_1$	$B_8\backslash B_1$	$B_9\backslash B_1$	$B_{10}\backslash B_1$	$B_{11}\backslash B_1$	$B_{12}\backslash B_1$	$B_{13}\backslash B_1$	$B_{14}\backslash B_1$	$B_{15}\backslash B_1$
x_1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
x_2	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
x_3	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
x_4	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
x_5	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1
x_6	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0
x_7	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

这一 BIBD 是 (14,7,6,3,2) —设计.

*§6 $GF(p)$ 域上的射影空间

欧氏空间中平面上一点的坐标为 (x_1,x_2)，若令

$$x_1=\frac{\xi_1}{\xi_3},\quad x_2=\frac{\xi_2}{\xi_3},\quad \xi_3\neq 0,$$

则 (ξ_1,ξ_2,ξ_3) 便是二维射影空间点的坐标．而且对于不为零的常数 ρ 有

$$\frac{\rho\xi_1}{\rho\xi_3}=\frac{\xi_1}{\xi_3},\qquad \frac{\rho\xi_2}{\rho\xi_3}=\frac{\xi_2}{\xi_3},$$

故 $(\rho\xi_1,\rho\xi_2,\rho\xi_3)$ 和 (ξ_1,ξ_2,ξ_3) 是同一点的坐标．

类似的理由 (x_1,x_1,x_3) 是三维欧氏空间的点的坐标．令

$$x_1=\frac{\xi_1}{\xi_4},\quad x_2=\frac{\xi_2}{\xi_4},\quad x_3=\frac{\xi_3}{\xi_4},\ \xi_4\neq 0,$$

则 $(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)$ 便是三维射影空间的点的坐标．

1. $GF(p)$ 的射影空间

$GF(p)$是 p 个元素的域，属于 $GF(p)$的$m-1$ 维射影空间的点 $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m)$，除去$(0,0,\cdots,0)$ 外有 p^m-1 个．因 $(\rho\xi_1,\rho\xi_2,\cdots,\rho\xi_m)$和$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m)$为同一点的坐标，其中 $\rho\in GF(p)$，且 $\rho\neq 0$，则$m-1$ 维射影空间的点 $(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\cdots,\xi_m)$ 个数实为 $\dfrac{p^m-1}{p-1}$.

若 $P_1(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m)$ 和 $P_2(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m)$ 是射影空间的两个点．令

$$(\rho_1\xi_1+\rho_2\eta_1,\rho_1\xi_2+\rho_2\eta_2,\cdots,\rho_1\xi_m+\rho_2\eta_m)$$

为 $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m)$ 点和 $(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m)$ 点联线上的点．ρ_1、ρ_2不能同时为零，故 ρ_1,ρ_2 有 p^2-1 种配合．和前面讨论相类似，有 $p-1$ 次重复度．所以 P_1,P_2 两点联线上不同的点数为

$$\frac{p^2-1}{p-1}=p+1, \tag{5-6-1}$$

其中包含 P_1,P_2 两点在内。

若令

$$\phi(m,d,p)=\frac{(p^{m+1}-1)(p^m-1)\cdots(p^{m-d+1}-1)}{(p^{d+1}-1)(p^d-1)\cdots(p-1)} \tag{5-6-2}$$

$GF(p)$域上的m维射影空间用 $PG(m,p)$ 表之，$PG(m,p)$中的点数为

$$\phi(m,0,p)=\frac{p^{m+1}-1}{p-1}.$$

例： $PG(2,2)$ 的点数为

$$\phi(2,0,2)=\frac{2^3-1}{2-1}=2^2+2+1=7.$$

即

$(0,0,1)$， $(0,1,0)$， $(0,1,1)$， $(1,0,0)$，

$(1,0,1)$， $(1,1,0)$， $(1,1,1)$。

而且由(5-6-1)可知两点联线上共有 3 点(包括两端点在内)。

$\{(0,0,1),\ (0,1,0),\ (0,1,1)\}$，

$\{(0,1,0),\ (1,0,0),\ (1,1,0)\}$，

$\{(0,1,1),\ (1,0,1),\ (1,1,0)\}$，

$\{(0,0,1),\ (1,0,0),\ (1,0,1)\}$，

$\{(0,1,0),\ (1,0,1),\ (1,1,1)\}$，

$\{(0,0,1),\ (1,1,0),\ (1,1,1)\}$，

$\{(0,1,1),\ (1,0,0),\ (1,1,1)\}$。

比如$(0,0,1)$,$(0,1,0)$两点的联线上有一点$(0,0,1)+(0,1,0)=(0,1,1)$。故$(0,1,1)$和$(0,0,1)$,$(0,1,0)$ 三点在同一线上。由于联线上只有 3 个点，故没有其它的点。其它类似可推。

可以把射影空间理解为是重心座标，即有不在一直线上的三

点 $A_1(\xi_1^{(1)},\xi_2^{(1)},\xi_3^{(1)})$，$A_2(\xi_1^{(2)},\xi_2^{(2)},\xi_3^{(2)})$，$A_3(\xi_1^{(3)},\xi_2^{(3)},\xi_3^{(3)})$ 构成一三角形 $A_1B_2C_3$，若分别在顶点 A_1、A_2、A_3 置质量 m_1、m_2、m_3，可得重心坐标

$$\begin{aligned}
\xi_1&=\frac{m_1\xi_1^{(1)}+m_2\xi_1^{(2)}+m_3\xi_1^{(3)}}{m_1+m_2+m_3},\\
\xi_2&=\frac{m_1\xi_2^{(1)}+m_2\xi_2^{(2)}+m_3\xi_2^{(3)}}{m_1+m_2+m_3},\\
\xi_3&=\frac{m_1\xi_3^{(1)}+m_2\xi_3^{(2)}+m_3\xi_3^{(3)}}{m_1+m_2+m_3}.
\end{aligned}\tag{5-6-3}$$

或

$$\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{pmatrix}=\frac{1}{m_1+m_2+m_3}\left[m_1\begin{pmatrix}\xi_1^{(1)}\\ \xi_2^{(1)}\\ \xi_3^{(1)}\end{pmatrix}+m_2\begin{pmatrix}\xi_1^{(2)}\\ \xi_2^{(2)}\\ \xi_3^{(2)}\end{pmatrix}+m_3\begin{pmatrix}\xi_1^{(3)}\\ \xi_2^{(3)}\\ \xi_3^{(3)}\end{pmatrix}\right]$$

若取

$$\vec{e}_1=\begin{bmatrix}\xi_1^{(1)}\\ \xi_2^{(1)}\\ \xi_3^{(1)}\end{bmatrix},\quad \vec{e}_2=\begin{bmatrix}\xi_1^{(2)}\\ \xi_2^{(2)}\\ \xi_3^{(2)}\end{bmatrix},\quad \vec{e}_3=\begin{bmatrix}\xi_1^{(3)}\\ \xi_2^{(3)}\\ \xi_3^{(3)}\end{bmatrix},$$

则

$$\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{bmatrix}=\frac{1}{m_1+m_2+m_3}(m_1\vec{e}_1+m_2\vec{e}_2+m_3\vec{e}_3).$$

可令重心的坐标为

$$\left(\frac{m_1}{m_1+m_2+m_3},\quad \frac{m_2}{m_1+m_2+m_3},\quad \frac{m_3}{m_1+m_2+m_3}\right).$$

显然质量 m_1、m_2、m_3 按比例的变化，重心不变，重心坐标也不变，正好和射影空间一致。

请读者试作 $PG(2,2)$ 的图象。

对于 $d<m$，$PG(d,p)$ 为含于 $PG(m,p)$ 空间中的 d 维射影空间，下面讨论 $PG(m,p)$ 中 d 维空间的个数。一般的 d 维空

间 $PG(d,p)$ 的构成如下，先选取第 1 个点 A_1，选择方法为 $\phi(m,0,p)$ 种；第 2 点 A_2 选择的方法有 $[\phi(m,0,p)-\phi(0,0,p)]=\phi(m,0,p)-1$ 种；第 3 点 A_3 要求不在 A_1A_2 的联线上，故有 $\phi(m,0,p)-\phi(1,0,p)$ 种；等等。这样独立的 $d+1$ 个点的选择方法有

$$\phi(m,0,p)[\phi(m,0,p)-1][\phi(m,0,p)-\phi(1,0,p)]\cdots\cdots[\phi(m,0,p)-\phi(d-1,0,p)]. \tag{5-6-4}$$

(5-6-4)用 $f(m,0,d,p)$ 表之。

由 A_1、A_2、$\cdots$、A_{d+1} 点所确定的空间中取独立的 $d+1$ 个点的方法有 $f(d,0,d,p)$ 种。故(5-6-4)中包含 $f(d,0,d,p)$ 重复度，即 $PG(m,p)$ 中不同的 $PG(d,p)$ 数目为

$$f(m,0,d,p)/f(d,0,d,p)=\phi(m,d,p). \tag{5-6-5}$$

下面求含 $PG(d,p)$，而含于 $PG(m,p)$ 的 $PG(k,p)$ 的个数，$0\leqslant d\leqslant k\leqslant m$，不含于 $PG(d,p)$ 的点 A_{d+2} 的选择方法数为

$$\phi(m,0,p)-\phi(d,0,p)=(p^{m+1}-p^{d+1})/(p-1)=p^m+p^{m-1}+\cdots+p^{d+1}, \tag{5-6-6}$$

A_{d+3} 点的选择的方法有 $\phi(m,0,p)-\phi(d+1,0,p)$ 种，即从 A_{d+2} 和 $PG(d,p)$ 构成的 $PG(d+1,p)$ 以外的点中选择。继续以上的过程得

$$[\phi(m,0,p)-\phi(d,0,p)][\phi(m,0,p)-\phi(d+1,0,p)]\cdots[\phi(m,0,p)-\phi(k-1,0,p)], \tag{5-6-7}$$

这个表达式用 $f(m,d,k,p)$ 表示。

所以含 $PG(d,p)$，而含于 $PG(m,p)$ 的不同的 $PG(k,p)$ 的个数为

$$f(m,d,k,p)/f(k,d,k,p)=\phi(m-d-1,k-d-1,p), \tag{5-6-8}$$

特别要求包含一个特定的点的 d 维空间的数目为在（5-6-8）中令 $d=0$，然后取得的结果中 k 改为 d，即

$$r=\phi(m-1,d-1,p).$$

同样的道理包含两个特定点的 d 维空间的数目为在（5-6-8）中令 $d=1$ 代入，结果令 k 改为 d，即

$$\lambda=\phi(m-2,\ d-2,p).$$

这样的 $GF(p)$ 域的射影几何学对应一个 BIBD 的 (b,v,r,k,λ)—设计如下。

$b=\phi(m,s,p)=$ 含于 $PG(m,p)$ 的 $PG(s,p)$ 数目；

$v=(p^{m+1}-1)/(p-1)=$ 含于 $PG(m,p)$ 的点数；

$r=\phi(m-1,s-1,\ p)=$ 含 $PG(m,\ p)$ 的一个点的 $PG(s,p)$ 数目；

$k=(p^{s+1}-1)/(p-1)=$ 含于 $PG(s,p)$ 的点数；

$\lambda=\phi(m-2,s-2,p)=$ 含 $PG(m,p)$ 的一直线的 $PG(m,p)$ 的数目。

§7 Hadamard 矩阵

Hadamard 矩阵在区组设计和编码理论等方面都有很多用处，它对于形成对称的 BIBD 有着重要作用。从§5 的讨论可知对称的 BIBD 又关系到一般的 BIBD 的形成。

所谓 n 阶的 Hadamard 矩阵 H_n 指的是以 1 或 -1 作为元素并满足

$$H_nH_n^T=nI$$

的 $n\times n$ 方阵。其中 I 是 n 阶单位矩阵。

例：

$$H_1=[1],$$

$$H_2=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix},$$

$$H_4=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}.$$

定理： $n>2$，H_n 是 Hadamard 矩阵的必要条件是 $n\equiv 0 \bmod 4$。

证： 设 $H_n=(a_{ij})_{n\times n}$，由于 $H_nH_n^T=nI$，所以

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk}=\begin{cases}0, & i\neq j,\\ n, & i=j.\end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{1k}+a_{2k})(a_{1k}+a_{3k})$$

$$=\sum_{k=1}^{n}a_{1k}^2+\sum_{k=1}^{n}a_{1k}a_{2k}$$

$$+\sum_{k=1}^{n}a_{1k}a_{3k}+\sum_{k=1}^{n}a_{2k}a_{3k}=n.$$

然而 $a_{1k}+a_{2k}$ 的结果可能有$+2,0,-2$，$a_{1k}+a_{3k}$ 也一样。故

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{1k}+a_{2k})(a_{1k}+a_{3k})$$

的各项或为$+4$，或为-4，或为0，总和是 4 的倍数。所以 n 是 4 的倍数。 ■

一种猜想是当 $n\equiv 0 \bmod 4$ 时存在 H_n，但未能证明。

定理： 若 $H_m=(a_{ij}^{(m)})_{m\times m}$，$H_n=(a_{ij}^{(n)})_{n\times n}$是 Hadamard 矩阵，则

$$H_{mn}=(a_{ij}^{(m)}H_n)$$

是 $(mn)\times(mn)$ 的 Hadamard 矩阵，其中

$$a_{ij}^{(m)}H_n=(a_{ij}^{(m)}a_{hk}^{(n)})_{n\times n}$$

即 $a_{ij}^{(m)}H_n$ 矩阵的第 h 行第 k 列的元素为

$$a_{ij}^{(m)}a_{hk}^{(n)}.$$

证： 矩阵 $(a_{ij}^{(m)}H_n)$ 的元素都是 $+1,-1$。而且每行每列都有 $\frac{1}{2}mn$ 个 $+1$，$\frac{1}{2}mn$ 个 -1。故每行自身的内积都等于 mn，而不同的两行的内积等于 H_m 中对应两行的内积乘以 H_n 中对应两行内积，故结果为零。根据 Hadamard 矩阵的定义矩阵 H_{mn} 是 $m\times n$ 阶的 Hadamard 矩阵。

推论： 若 H_n 是 Hadamard 矩阵，则

$$\begin{pmatrix} H_n & H_n \\ H_n & -H_n \end{pmatrix}$$

也是 Hadamard 矩阵。

第 1 行、第 1 列的元素为 $+1$ 的 Hadamard 矩阵叫做规范化的 Hadamard 矩阵。对 Hadamard 矩阵进行行与行、列与列的互换，以及对某一行或某一列乘以 -1，不改变其作为 Hadamard 矩阵，然而可使其达到规范化。

定理： n 阶 $(n\geqslant 8)$ 规范化的 Hadamard 矩阵 H_n 对应一对称的 BIBD，而且这一对称的 BIBD 是 $\left(n-1,\frac{n}{2}-1,\frac{n}{4}-1\right)$-设计。

证： 取消 Hadamard 矩阵 H_n 的第 1 行第 1 列得 $(n-1)\times(n-1)$的矩阵，并令其中所有 -1 元素改为 0，如此所得的矩阵设为 K_{n-1}，则 K_{n-1} 便是所求的区组设计的区组矩阵。K_{n-1} 的每行有$\frac{n}{2}-1$个 1，$\frac{n}{2}$ 个 0，任意两行的内积等于 $\frac{n}{4}-1$。 ■

§8 Hadamard 矩阵的构成

在这一节里得介绍一种 Hadamard 矩阵的构成方法，如§7所讨论的那样可通过 Hadamard 矩阵的运算得出更多的阶数更高的或阶数比较低的 Hadamard 矩阵，从而可得到一系列的对称的 BIBD。又如§5 所讨论的那样由对称的 BIBD 可得到一般的BIBD。

若 p 为素数，而且 $p+1$ 是大于 3 且为 4 的倍数的数，$GF(p)=\{0,1,2,\cdots,p-1\}$。$\alpha$ 为 $GF(p)$的本原元素，即使

$$GF(p)=\{0,\alpha^0,\alpha^1,\cdots,\alpha^{p-2}\},$$

$$\alpha^{p-1}-1=(\alpha^{\frac{p-1}{2}}-1)(\alpha^{\frac{p-1}{2}}+1)\equiv 0 \mod p,$$

$$\therefore\ \alpha^{\frac{p-1}{2}}\equiv -1 \mod p.$$

定义：对于 $\beta\in GF(p)$，设

$$\chi(\beta)=\begin{cases}0, & \beta=0;\\ (-1)^i, & \beta=\alpha^i.\end{cases}$$

即 $\beta=0$ 时 $\chi(0)=0$，$\beta=\alpha^{2i}\left(0\leqslant i\leqslant\frac{1}{2}(p-3)\right)$ 时 $\chi(\beta)=1$，否则 $\chi(\beta)=-1$。

例． $GF(19)=\{0,1,2,\cdots,18\}$。$\alpha=2\in GF(19)$，在 mod 19 下有

$2^0=1,2^1=2,2^2=4,2^3=8,2^4=16,2^5=32\equiv 13,$

$2^6\equiv 7,2^7\equiv 14,2^8\equiv 9,2^9\equiv 18,2^{10}\equiv 17,2^{11}\equiv 15,$

$2^{12}\equiv 11,2^{13}\equiv 3,2^{14}\equiv 6,2^{15}\equiv 12,2^{16}\equiv 5,2^{17}\equiv 10,2^{18}\equiv 1.$

故 $\chi(0)=0,\chi(1)=1,\chi(2)=-1,\chi(3)=-1,$

$\chi(4)=1,\chi(5)=1,\chi(6)=1,\chi(7)=1,\chi(8)=-1,$

$\chi(9)=1,\chi(10)=-1,\chi(11)=1,\chi(12)=-1,$

$\chi(13)=-1,\chi(14)=-1,\chi(15)=-1,\chi(16)=1,$

$\chi(17)=1, \chi(18)=-1$。

关于 $\chi(\beta)$ 函数有如下的性质：

(1) $\chi(\alpha\beta)=\chi(\alpha)\chi(\beta)$。显然。

(2) $\sum\limits_{\alpha\in GF(p)}\chi(\alpha)=0$。

证：

$$\sum_{\alpha\in GF(p)}\chi(\alpha)=\chi(0)+\sum_{i=0}^{p-2}\chi(\alpha^i)=\sum_{i=0}^{p-2}(-1)^i.$$

由于 $p-1$ 为偶数，故上式显然成立。

(3) β 为 $GF(p)$中非零元素，此时有

$$\sum_{\alpha\in GF(p)}\chi(\alpha)\chi(\alpha+\beta)=-1.$$

证： 设 $\alpha\neq 0, \alpha+\beta=\alpha(1+\alpha^{-1}\beta)$。

$\therefore \chi(\alpha)\chi(\alpha+\beta)=[\chi(\alpha)]^2\chi(1+\alpha^{-1}\beta)=\chi(1+\alpha^{-1}\beta)$.

令 $r=1+\alpha^{-1}\beta$，α 遍历 $GF(p)$的所有非零元素时，r 遍历 $GF(p)$的所有非 1 元素。

$$\therefore \sum_{\alpha\in GF(p)}\chi(\alpha)\chi(\alpha+\beta)=\sum_{\substack{\alpha\in GF(p)\\ \alpha\neq 0}}\chi(1+\alpha^{-1}\beta)$$

$$=\sum_{\substack{r\in GF(p)\\ r\neq 1}}\chi(r)=\sum_{r\in GF(p)}\chi(r)-\chi(1)=-1.$$

(4) 当 $p+1$ 是 4 的倍数时，即 $p=4k-1$ 时，

$$\frac{p-1}{2}=\frac{4k-2}{2}=2k-1,$$

即 $\frac{1}{2}(p-1)$是奇数。

$$\alpha^{\frac{p-1}{2}}=-1.$$

$$\therefore\quad \chi(-1)=\chi(\alpha^{\frac{p-1}{2}})=(-1)^{\frac{p-1}{2}}=-1.$$

定理： 下列 $(p+1)$ 阶方阵H是 Hadamard 矩阵

$$H=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & -1 & \chi(1) & \chi(2) & \chi(3) & \cdots & \chi(p-1)\\ 1 & \chi(p-1) & -1 & \chi(1) & \chi(2) & \cdots & \chi(p-2)\\ 1 & \chi(p-2) & \chi(p-1) & -1 & \chi(1) & \cdots & \chi(p-3)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & \chi(1) & \chi(2) & \chi(3) & \chi(4) & \cdots & -1\end{bmatrix}.$$

证：显然矩阵H的所有元素都是$+1$或-1。

下面证H的任意两行的内积为零就可以了。首先第1行与任意行内积为

$$1-1+\sum_{i=1}^{p-1}\chi(i)=\sum_{i=1}^{p-1}\chi(i).$$

由于 $\chi(0)=0$，

$$\therefore\quad \sum_{i=1}^{p-1}\chi(i)=\sum_{\alpha\in GF(p)}\chi(\alpha)=0.$$

这就证明第1行与其它任何一行都正交。

其次证明第2行与其它各行正交。两行如下：

$$\begin{matrix}1 & -1 & \chi(1) & \chi(2) & \cdots & \chi(l) & \cdots & \chi(-1)\\ 1 & \chi(-k) & \chi(1-k) & \chi(2-k) & \cdots & \chi(l-k) & \cdots & \chi(-1-k)\end{matrix}$$

其内积为

$$1-\chi(-k)-\chi(k)+\sum_{i=1}^{p-1}\chi(i)\chi(i-k).$$

由于

$$\chi(-k)=\chi(-1)\chi(k)=-\chi(k),$$

$$\sum_{i=1}^{p-1}\chi(i)\chi(i-k)=\sum_{\alpha\in GF(p)}\chi(\alpha)\chi(\alpha+\beta)=-1,$$

这样就证明第2行与其它各行正交。

第3行与其它各行正交同样证明。余此类推。 ∎

例。根据 $GF(19)$ 内各元素β的 $\chi(\beta)$可得 H_{20}。

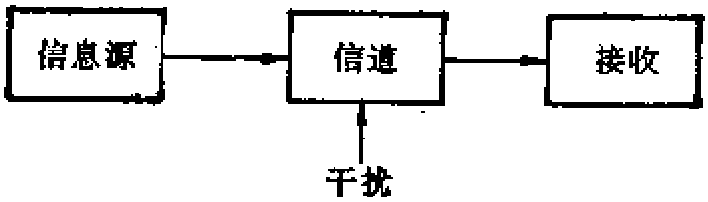
$$
H_{20}=\begin{bmatrix}
+&+&+&+&+&+&+&+&+&+&+&+&+&+&+&+&+&+&+&+\\
+&-&+&-&-&+&+&+&+&-&+&-&+&-&-&-&-&+&+&-\\
+&-&-&+&-&-&+&+&+&+&-&+&-&+&-&-&-&-&+&+\\
+&+&-&-&+&-&-&+&+&+&+&-&+&-&+&-&-&-&-&+\\
+&+&+&-&-&+&-&-&+&+&+&+&-&+&-&+&-&-&-&-\\
+&-&+&+&-&-&+&-&-&+&+&+&+&-&+&-&+&-&-&-\\
+&-&-&+&+&-&-&+&-&-&+&+&+&+&-&+&-&+&-&-\\
+&-&-&-&+&+&-&-&+&-&-&+&+&+&+&-&+&-&+&-\\
+&-&-&-&-&+&+&-&-&+&-&-&+&+&+&+&-&+&-&+\\
+&+&-&-&-&-&+&+&-&-&+&-&-&+&+&+&+&-&+&-\\
+&-&+&-&-&-&-&+&+&-&-&+&-&-&+&+&+&+&-&+\\
+&+&-&+&-&-&-&-&+&+&-&-&+&-&-&+&+&+&+&-\\
+&-&+&-&+&-&-&-&-&+&+&-&-&+&-&-&+&+&+&+\\
+&+&-&+&-&+&-&-&-&-&+&+&-&-&+&-&-&+&+&+\\
+&+&+&-&+&-&+&-&-&-&-&+&+&-&-&+&-&-&+&+\\
+&+&+&+&-&+&-&+&-&-&-&-&+&+&-&-&+&-&-&+\\
+&+&+&+&+&-&+&-&+&-&-&-&-&+&+&-&-&+&-&-\\
+&-&+&+&+&+&-&+&-&+&-&-&-&-&+&+&-&-&+&-\\
+&-&-&+&+&+&+&-&+&-&+&-&-&-&-&+&+&-&-&+\\
+&+&-&-&+&+&+&+&-&+&-&+&-&-&-&-&+&+&-&-
\end{bmatrix}
$$

§9 编码理论基本概念

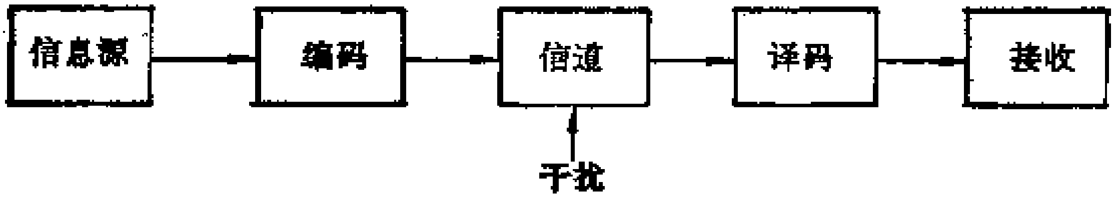
上面讨论的 BIBD 不仅与科学试验的设计密切有关，而且还在数字通信的编码中有广泛的应用。编码理论也是计算机科学的重要内容之一。随着通信的需要，要求提高通信的可靠性和速度。编码理论的主要任务是研究具有检错和纠错能力且效率高的码。

下面假定信息源是一组二进制数，比如用 n 位二进制数表示一个信息，称为码字。n 叫做码长，每一位数叫做码元。这样的码又叫做二元码。

使接收端可以判断传输过程是否出错的码称为检错码，最简单的例子是奇偶校验码。如若不仅能判断是否出错，而且还具有



纠正传输过程的差错的能力，这样的码叫做纠错码. 检错码和纠错码都是抗干扰码. 抗干扰编码的通信过程用下图表示:



令 $\mathbf{B}^n$ 表示 n 位二进制数的集合. 编码过程 $\mathbf{E}$ 是 m 位二进制数到 n 位二进制数的转换:

$$\mathbf{E}:\mathbf{B}^m \to \mathbf{B}^n$$

即由 $\mathbf{B}^m$ 到 $\mathbf{B}^n$ 的映射. 则译码过程 $\mathbf{D}$ 为

$$\mathbf{D}:\mathbf{B}^n \to \mathbf{B}^m.$$

$\mathbf{W} = w_1w_2\cdots w_n$ 是 n 位二元码，即 $w_i \in \{0,1\}$. 接收端收到的若是 $R = r_1r_2\cdots r_n$. 设

$$\mathbf{R} = \mathbf{W} + \mathbf{E}$$

这里使用的加法是“按住加”，即每一位加法满足

$$0 + 0 = 1 + 1 = 0, \ 0 + 1 = 1 + 0 = 1$$

其中 $\mathbf{E} = e_1e_2\cdots e_n$.

显然

$$e_i = \begin{cases} 0, & w_i = r_i \\ 1, & w_i \neq r_i \end{cases}$$

且

$$\mathbf{W} = \mathbf{R} + \mathbf{E},\ \mathbf{E} = \mathbf{W} + \mathbf{R}.$$

设 $\mathbf{A} = a_1a_2\cdots a_n \in \mathbf{B}^n$ $\mathbf{B} = b_1b_2\cdots b_n \in \mathbf{B}^n$. 令 $w(\mathbf{A})$ 为 $\mathbf{A}$ 的分量为 1 的个数，称为 A 的权。

$d(\mathbf{A},\mathbf{B}) = w(\mathbf{A}+\mathbf{B})$ 称为 A 与 B 的距离。

引理: 若 $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C} \in \mathbf{B}^n$，则

(1) $d(\mathbf{A},\mathbf{B}) = d(\mathbf{B},\mathbf{A})$.

(2) $d(\mathbf{A},\mathbf{C}) \leqslant d(\mathbf{A},\mathbf{B}) + d(\mathbf{B},\mathbf{C})$.

证:

(1) $d(\mathbf{A},\mathbf{B}) = w(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = w(\mathbf{B}+\mathbf{A}) = d(\mathbf{B},\mathbf{A})$.

(2) 定义

$$d(a_i,b_i) = \begin{cases} 0, & b_i = a_i; \\ 1, & b_i \neq a_i. \end{cases}$$

则

$$d(a_i,c_i) \leqslant d(a_i,b_i) + d(b_i,c_i).$$

$$\therefore d(\mathbf{A},\mathbf{C}) = \sum_{i=1}^{n} d(a_i,c_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} d(a_i,b_i)$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} d(b_i,c_i) \leqslant d(\mathbf{A},\mathbf{B}) + d(\mathbf{B},\mathbf{C}).$$

定理: 一组码可以检出 k 个错的充要条件是这组码的码字间最短距离至少为 $k+1$。

证: 设 $\mathbf{E}:\mathbf{B}^m \to \mathbf{B}^n$，$\mathbf{A} \in \mathbf{B}^n$ 是码字，传输得 $\mathbf{R}$，误差 $\mathbf{E} = \mathbf{A} + \mathbf{R}$，$w(\mathbf{E}) = d(\mathbf{A},\mathbf{R})$. 错误 $\mathbf{E}$ 可被检出的充要条件是 $\mathbf{R}$ 不是码字。因此 $w(\mathbf{E}) \leqslant k$ 的所有误差可被检出的充要条件是不存在码字 $\mathbf{B} \neq \mathbf{A}$，满足

$$d(\mathbf{A},\mathbf{B}) \leqslant k$$

而任意两个码字 $\mathbf{A},\mathbf{B}$，它们的距离至少为 $k+1$。 ■

定理: 已知一组编码的任意两码字的最短距离为 $2k+1$，则所有权不超过 k 的误差可得到纠正。

证： 设 $\mathbf{A}$ 是一码字，在传输过程中发生误差，接收到的为$\mathbf{R}$，$d(\mathbf{A},\mathbf{R}) \leqslant k$. 则不存在码字 $\mathbf{B}$，使得 $d(\mathbf{B},\mathbf{R}) \leqslant k$. 否则

$$d(\mathbf{A},\mathbf{B}) \leqslant d(\mathbf{A},\mathbf{R}) + d(\mathbf{R},\mathbf{B}) \leqslant k + k < 2k + 1$$

与定理的假设相矛盾。 ■

定理证明提供了一种纠错法，即与 $\mathbf{A}$ 的距离 $d(\mathbf{A},\mathbf{R}) \leqslant k$的 $\mathbf{R} \in \mathbf{B}^n$，可纠为 $\mathbf{A}$，而 $\mathbf{R}$ 作为码字 $\mathbf{A}$ 的传输出错处理。

§10 线性码和 Hamming 码

生成矩阵与校验矩阵。

取矩阵

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{m1} & g_{m2} & \cdots & g_{mn} \end{pmatrix} = (g_{ij})_{m\times n}$$

若编码过程为

$$E: \mathbf{W} = \mathbf{A}\mathbf{G}$$

其中 $A = (a_1a_2\cdots a_m) \in \mathbf{B}^m$. 称矩阵 $\mathbf{G}$ 为生成矩阵. 例如

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{A} = (0\ 1\ 1)$对应有码字

$$\mathbf{W} = (011)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (0\ \ 1\ 1\ 1\ 1\ \ 0)$$

特别是若取生成矩阵

$$
\mathbf{G}=\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & g_{1m+1} & g_{1m+2} & \cdots & g_{1n}\\
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & g_{2m+1} & g_{2m+2} & \cdots & g_{2n}\\
0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & g_{3m+1} & g_{3m+2} & \cdots & g_{3n}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots\\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & g_{mm+1} & g_{mm+2} & \cdots & g_{mn}
\end{pmatrix}.
$$

对于 $\mathbf{A}=(a_1a_2\cdots a_m)\in B^m$,则对应的码字有

$$
\mathbf{W}=\mathbf{AG}=(a_1a_2\cdots a_m)\begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 & g_{1m+1} & \cdots & g_{1n}\\
0 & 1 & & 0 & g_{2m+1} & \cdots & g_{2n}\\
0 & 0 & \ddots & 0 & g_{3m+1} & \cdots & g_{3n}\\
\vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & & \vdots\\
0 & 0 & & 1 & g_{mm+1} & \cdots & g_{mn}
\end{pmatrix}
$$

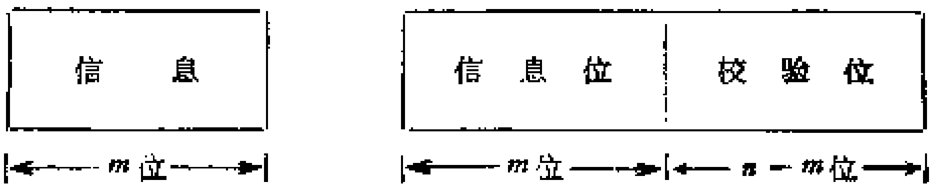
$$
=(w_1w_2\cdots w_mw_{m+1}\cdots w_n).
$$

显然有 $w=a_1, w_2=a_2, \cdots, w_m=a_m$.

$$
w_{m+j}=g_{1j}w_1+g_{2j}w_2+\cdots+g_{mj}w_m, \qquad (5\text{-}10\text{-}1)
$$

$$
j=1,2,\cdots,n-m.
$$

所以码字由两部分构成,一部分是信息位,另一部分是检验位. 如下图所示.



例如

$$
\mathbf{G}=\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1\\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1
\end{pmatrix}
$$

$$
(a_1a_2a_3)\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1\\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1
\end{pmatrix}=(a_1a_2a_3a_4a_5a_6)
$$

则有 $a_1+a_3+a_4=0$, $a_1+a_2+a_5=0$, $a_2+a_3+a_6=0$ 或

写成

$$\begin{pmatrix}1&0&1&1&0&0\\1&1&0&0&1&0\\0&1&1&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\\a_5\\a_6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

一般说来(5-10-1)可写为

$$\begin{cases}g_{1m+1}a_1+g_{2m+1}a_2+\cdots+g_{mm+1}a_m+a_{m+1}=0,\\g_{1m+2}a_1+g_{2m+2}a_2+\cdots+g_{mm+2}a_m+a_{m+2}=0,\\\cdots\cdots\cdots\cdots\\g_{1n}a_1+g_{2n}a_2+\cdots+g_{mn}a_m+a_n=0.\end{cases}$$

或写成

$$\mathbf{H}(\mathbf{W})=\mathbf{0}$$

其中 $\mathbf{W}=\mathbf{AG}$,

$$\mathbf{H}=\begin{pmatrix}g_{1m+1}&g_{2m+1}&\cdots&g_{mm+1}&1&0&0&\cdots&0\\g_{1m+2}&g_{2m+2}&\cdots&g_{mm+2}&0&1&0&\cdots&0\\\cdots\cdots&&&&&&\ddots&&\\g_{1n}&g_{2n}&\cdots&g_{mn}&0&0&0&\cdots&1\end{pmatrix}$$

矩阵 $\mathbf{H}$ 称为对应于生成矩阵 $\mathbf{G}$ 的校验矩阵. 已知 $\mathbf{G}$ 便可求得矩阵 $\mathbf{H}$. 反之亦然。

校验矩阵 $\mathbf{H}$ 可用于纠正一个错误。例如对于

$$\mathbf{H}=\begin{pmatrix}1&0&1&1&0&0\\1&1&0&0&1&0\\0&1&1&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{R}=(1\quad 0\quad 0\quad 1\quad 0\quad 1)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

显然 $\mathbf{R}=(1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1)$不是码字．因为如果是码字，必有$\mathbf{HR}^T=\mathbf{0}$．若 W是码字，而且

$$\mathbf{R}=\mathbf{W}+\mathbf{E},$$

则
$$\mathbf{HR}^T=\mathbf{HW}^T+\mathbf{HE}^T=\mathbf{HE}^T$$

若 $\mathbf{E}=(0\cdots\underset{\substack{\uparrow\\ \text{第}i\text{位}}}{1}\ 0\cdots0)^T$，则 $\mathbf{HE}^T$ 必是矩阵 $\mathbf{H}$ 的第 i 列．故

根据 $\mathbf{HE}^T=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，可知在第 2 位出错，纠正得 $\mathbf{W}=(110101)$．

故取其信息位便得信息(110)．即正确的译码为110．

自然如若出现两个或两个以上的错误，就不能正确译码．

译码的步骤：接收到

$$\mathbf{R}=(r_1\ r_2\cdots r_n)$$

(1) 计算 $\mathbf{S}=\mathbf{HR}^T$，$\mathbf{S}$ 称为是校正子．

(2) 若 $\mathbf{S}=\mathbf{0}$，则可认为传输过程是正确的，确认原来的信息为 $r_1r_2\cdots r_m$．如若 $\mathbf{S}\neq\mathbf{0}$，则转 3．

(3) 若 $\mathbf{S}$ 是 $\mathbf{H}$ 的第 i 列，则认为接收到的 $\mathbf{R}$ 在第 i 位出错，并予以纠正得 $\mathbf{R}_1$．取 $\mathbf{R}_1$ 的前 m 位作为信息．如若 $\mathbf{S}$ 不为 $\mathbf{H}$ 的某一列，也不为零，则认为传输过程至少出现两个错误，无法正确译码．

定理： 校验矩阵 $\mathbf{H}=(h_{ij})_{(n-m)\times n}$ 能纠正一个错误的充要条

件是 H 的各列互不相同且非零。

证： 必要性的证明。若 H 的第 i 列为零向量。对于 $\mathbf{E}=0\,0\cdots\underset{\substack{\uparrow\\ \text{第 } i \text{ 位}}}{1}\,0\cdots0$，有

$$\mathbf{H}(\mathbf{W}+\mathbf{E})^T=\mathbf{H}\mathbf{W}^T+\mathbf{H}\mathbf{E}^T=\mathbf{H}\mathbf{E}^T=\mathbf{0}.$$

将导至不能正确译码。而且若 H 矩阵的第 i 列和第 j 列相同，则出现在第 i 位(或第 j 位)的错误将无法判定。更有甚者若在第 i 位和第 j 位同时出现错误时，将误以为传输正确。

充分性成立是明显的。 ∎

定理： 若 $\mathbf{A}=(a_{ij})_{m\times(n-m)}$ 是(0,1)矩阵，则以矩阵

$$\mathbf{G}=(\mathbf{I}_{(m)}\vdots\mathbf{A})$$

作为生成矩阵，对应的校验矩阵为

$$\mathbf{H}=(\mathbf{A}^T\vdots\mathbf{I}_{(n-m)}).$$

其中 $\mathbf{I}_{(m)}$ 为 m 维的单位矩阵。

证明从略。

下面介绍一个著名的纠错码——Hamming 码。

可构造一 $(n-m)\times n$ 阶校验矩阵 $\mathbf{H}=(h_{ij})$ 如下。令 $l=n-m$，可得 2^l-1 个非零的列向量。将这些列向量重新排列，使得后面 l 列为一单位矩阵。令这样的矩阵为 H_l。例如

$$H_3=\begin{pmatrix}0&1&1&1&1&0&0\\1&0&1&1&0&1&0\\1&1&0&1&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$H_4=\begin{pmatrix}1&1&1&0&0&0&1&1&1&0&1&1&0&0&0\\1&0&0&1&1&0&1&1&0&1&1&0&1&0&0\\0&1&0&1&0&1&1&0&1&1&1&0&0&1&0\\0&0&1&0&1&1&0&1&1&1&1&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

利用 H_n 作为校验矩阵可以对长为 2^n-1 的码纠正一个错误。这样的码称为 Hamming 码。

上面构造的矩阵 H_p 每列非零，而且互不相同。矩阵 H_p 的列数可多达 2^n-1。不难验证，总存在三列总和等零。这说明这样构造的 Hamming 码最短距离为3。即能而且只能纠正一个错误。

可以证明若校验矩阵 $H=(h_{ij})$ 任意 k 列之和非零，$k\leqslant 4$，则可纠正两个错误。

§11 陪集译码法

m 位二进制数的全体，关于不进位的加法运算构成群。对于 $\mathbf{A}\in\mathbf{R}^m,\mathbf{B}\in\mathbf{B}^m$，若

$$\mathbf{E}(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\mathbf{E}(\mathbf{A})+\mathbf{E}(\mathbf{B})$$

则称这个编码为线性码。即码字 $\mathbf{E}(\mathbf{A})$ 和 $\mathbf{E}(\mathbf{B})$ 之和是码字。不难证明线性码的码字空间关于加法（二进制不进位加）构成群。利用生成矩阵编的码是线性码的典型例子。

若 $\mathbf{G}$ 是群，$\mathbf{H}$ 是 $\mathbf{G}$ 的真子群。设 $\mathbf{H}=\{h_1=e,\ h_2,\cdots,h_r\}$，取 $g_1\in\mathbf{G}\backslash\mathbf{H}$，作

$$g_1\mathbf{H}=\{g_1,g_1h_2,\cdots,g_1h_r\}\subseteq\mathbf{G}.$$

若 $\mathbf{G}\backslash\mathbf{H}\backslash g_1\mathbf{H}$ 非空，取 $g_2\in\mathbf{G}\backslash\mathbf{H}\backslash g_1\mathbf{H}$，作

$$g_2H=\{g_2,\ g_2h_2,\cdots,g_2h_r\},$$

继续以上的过程，直到 $\mathbf{G}$ 的元素取尽为止。

$$\begin{array}{llllll}
\mathbf{H}: & e & h_2 & h_3 & \cdots & h_r\\
g_1\mathbf{H}: & g_1 & g_1h_2 & g_1h_3 & \cdots & g_1h_r\\
g_2\mathbf{H}: & g_2 & g_2h_2 & g_2h_3 & \cdots & g_2h_r\\
 & \cdots\cdots & \cdots\cdots & & & \\
g_t\mathbf{H}: & g_t & g_th_2 & g_th_3 & \cdots & g_th_r
\end{array}$$

$$\mathbf{G}=\mathbf{H}+g_1\mathbf{H}+g_2\mathbf{H}+\cdots+g_t\mathbf{H}$$

则称 $g_i\mathbf{H}$ 为群 $\mathbf{G}$ 关于子群 $\mathbf{H}$ 的一个陪集。g_i 称为陪集 $g_i\mathbf{H}$

的首项。

利用陪集的思想构造 Slepian 译码表如下：设 $w_1,w_2,\cdots,w_{2^m}$ 是线性码的码字. 设 $w_1=0\ 0\cdots 0$,将 2^m个码字从 W_1 开始,从左向右排列. 上面已讨论过 $w_1,w_2,\cdots,w_{2^m}$ 关于二进制数的不进位加法成群，设为 H. n 位二进制数集合关于不进位加法构成 2^n个元素的群 G. H 是 G 的子群. 取 G\H 中最小的数 $g_1\in G$,但 $g_1\notin H$, 构造 $H+e_1=\{e_1,e_1+w_2,e_1+w_3,\cdots e_1+w_{2^m}\}$。将 e_1 置于 w_1 的下方，e_1+w_2 置于 w_2 下方，……，$e_1+w_{2^m}$ 置于 w_{2^m} 下方。 再取余下的 $2^n-2\cdot 2^m$ 个数中最小的数 e_2,构造 $H+e_2=\{e_2,e_2+w_2,\cdots,e_2+w_{2^m}\}$,并从左向右依次排列. 继续以上的过程,直到将$2^n$个数取尽为止。将 Slepian 译码表如下：

$$
\begin{array}{lllll}
w_1=e & w_2 & w_3 & \cdots w_i & \cdots w_{2^m} \\
e_1 & w_2+e_1 & w_3+e_1 & \cdots w_i+e_1 & \cdots w_{2^m}+e_1 \\
e_2 & w_2+e_2 & w_3+e_2 & \cdots w_i+e_2 & \cdots w_{2^m}+e_2 \\
\cdots & \cdots & \cdots & & \\
e_{2^{n-m}-1} & w_2+e_{2^{n-m}-1} & w_3+e_{2^{n-m}-1} & \cdots w_i+e_{2^{n-m}-1} & \cdots w_{2^m}+e_{2^{n-m}-1}
\end{array}
$$

例如

$$
G=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},
$$

$$
H=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

信息	码字	信息	码字
0 0 0	0 0 0 0 0 0	1 0 0	1 0 0 0 1 1
0 0 1	0 0 1 1 1 0	1 0 1	1 0 1 1 0 1
0 1 0	0 1 0 1 0 1	1 1 0	1 1 0 1 1 0
0 1 1	0 1 1 0 1 1	1 1 1	1 1 1 1 1 1

可得相应的 Slepian 译码表如表 5-11-1：

表 5-11-1 Slepian 译码表

000000	001110	010101	100011	011011	101101	110110	111000
000001	001111	010100	100010	011010	101100	110111	111001
000010	001100	010111	100001	011001	101111	110100	111010
000100	001010	010001	100111	011111	101001	110010	111100
001000	000110	011101	101011	010011	100101	111110	110000
010000	011110	000101	110011	001011	111101	100110	101000
100000	101110	110101	000011	111011	001101	010110	011000
001001	000111	011100	101010	010010	100100	111111	110001

Slepian 译码表可用于译码。若接收到的为 **R**, Slepian 译码表中 **R** 所在的列的第一个码字便是所求。假如干扰正好是陪集首项时，这样的译码是正确的，否则出错。

不难证明 Slepian 译码表中同一行元素的校正子 $\mathbf{S}=\mathbf{HR}^T$ 是相同的，不同行的校正子是不同的。

证. 第 j 行的元素为 w_i+e_{j-1}，故

$$\mathbf{H}(w_i+e_{j-1})^T=\mathbf{H}w_i^T+\mathbf{H}e_{j-1}^T=\mathbf{H}e_{j-1}^T$$

$$i=1,2,\cdots,2^m,\quad j=1,2,\cdots,2^{n-m}$$

这就证明了同一行的校正子是相同的。

若第 h 行和第 k 行的校正子相同，这将导致

$$\mathbf{H}e_h^T=\mathbf{H}e_k^T$$

这跟 Slepian 译码表的前提相矛盾。根据这个道理，可得译码方法如下：

(1) 计算校正子 $\mathbf{S}=\mathbf{HR}^T$；

(2) 根据 **S** 确定陪集首项 e_k；

(3) 码字 $\mathbf{W}_i=\mathbf{R}+e_k$。

这样只要给出校正子和陪集首项的对应表。Slepian 译码表的存储量为 2^n，但是校正子和陪集首项对应关系表的存储量为 2^{n-m+1}，空间复杂性有很大的改善。比如上面例子的校正子和陪集首项的关系为表 5-11-2.

表 5-11-2

校正子	陪集首项
0 0 0	0 0 0 0 0 0
0 0 1	0 0 0 0 0 1
0 1 0	0 0 0 0 1 0
0 1 1	1 0 0 0 0 0
1 0 0	0 0 0 1 0 0
1 0 1	0 1 0 0 0 0
1 1 0	0 0 1 0 0 0
1 1 1	0 0 1 0 0 1

若 $\mathbf{R}=1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1$

$$\mathbf{S}=\mathbf{H}\mathbf{R}^T=\begin{pmatrix}0&1&1&1&0&0\\1&0&1&0&1&0\\1&1&0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

校正子 001 的陪集首项为 000001. 故得码字 $\mathbf{W}=111001+000001=111000$.

若 $W=111000, e=000011$，故

$$\mathbf{R}=111000+000011=111011.$$

但校正子

$$\mathbf{S}=\begin{pmatrix}0&1&1&1&0&0\\1&0&1&0&1&0\\1&1&0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}.$$

但 011 对应的陪集首项为 100000，则

$$\mathbf{W}=111011+100000=011011.$$

这个结果说明译码结果是不正确的。因为它的误差不是陪集首项。

§12 BIBD 和编码

(1) Hadamard 码

$n\times n$ 的 Hadamard 矩阵，各行的元素 1 令它对应于 $GF(2)$ 域中的 0，-1 对应于 1，这样 Hadamard 矩阵对应一组个数等于 n，长度为 $n-1$（第一列除外）的正交码。所谓正交码，即任意两个码字的内积为 0，而且最小距离等于 $n/2$。例如对于 H_{12}，

$$H_{12}=\begin{bmatrix}+&+&+&+&+&+&+&+&+&+&+&+\\+&-&+&-&+&+&+&-&-&-&+&-\\+&-&-&+&-&+&+&+&-&-&-&+\\+&+&-&-&+&-&+&+&+&-&-&-\\+&-&+&-&-&+&-&+&+&+&-&-\\+&-&-&+&-&-&+&-&+&+&+&-\\+&-&-&-&+&-&-&+&-&+&+&+\\+&+&-&-&-&+&-&-&+&-&+&+\\+&+&+&-&-&-&+&-&-&+&-&+\\+&+&+&+&-&-&-&+&-&-&+&-\\+&-&+&+&+&-&-&-&+&-&-&+\\+&+&-&+&+&+&-&-&-&+&-&-\end{bmatrix},$$

$$C_1=(0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0),$$
$$C_2=(1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1),$$
$$C_3=(1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0),$$
$$C_4=(0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1),$$
$$C_5=(1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1),$$
$$C_6=(1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1),$$
$$C_7=(1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0),$$
$$C_8=(0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0),$$
$$C_9=(0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0),$$
$$C_{10}=(0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1),$$
$$C_{11}=(1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0),$$
$$C_{12}=(0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1).$$

(2) $BIBD$ 与编码

例如有一 $BIBD$, $v=b=4t-1$, $k=r=2t-1$. 则任意两组有 $\lambda=t-1$ 个元素相同. 这个设计可以构造得一组数目为 $8t$,长度为 $4t$ 的纠错码. 方法如下:

作一矩阵,$4t$ 列的编号依次为 $0,1,2\cdots,4t-1$. 令第 1 行的元素全部为 1. 第 2 行到第 $4t$ 行的构造分别依据 B_1, B_2, $\cdots$, B_{4t-1} 来确定. 以第 i 行为例, 第 0 列元素为 1;B_{i-1} 中所包含的 $2t-1$ 个数所对应的列令之为 1,其余 $2t$ 个元素为 0.

从 $4t+1$ 行到 $8t$ 行分别是第 1 行到 $4t$ 行的补, 即第 i 行的元素 0 改 1,1 改为 0, 便得 $4t+i$ 行, $i=1,2,\cdots,4t$. 这样得一 $8t\times 4t$ 的矩阵.

可以证明前 $4t$ 行中任意两行都有 $2t$ 个列元素相同. 从 $4t+1$ 到 $8t$ 行也有类似的结果. 不仅如此,这 $8t$ 行中任意两行,只要不是互补的,也有类似的性质.

由这矩阵的 $8t$ 个行所确定的 $8t$ 个码句, 可以纠正 $t-1$ 个错.

详细的讨论留作作业。

习 题

1. 试求一对 7×7 的正交拉丁方.

2. 试求 3 个 5×5 的两两正交的拉丁方.

3. 试证明不可能存在 k 个 $k\times k$ 两两正交的拉丁方。

4. 试判断下列两组的拉丁方是否正交.

(a)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

(b)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \\ 5 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \\ 5 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

5. 试判定下列的拉丁方是否两两正交?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

6. 试构造一对 12×12 的正交拉丁方.

7. 试问下列区组是否为 $BIBD$？若是，试确定其对应的参数 b, v, r, k, λ。

(a) B_1: 1, 2, 3;　　B_2: 2, 3, 4;

B_3: 3, 4, 5;　　B_4: 1, 4, 5;

B_5: 1, 2, 5.

(b) B_1: 1, 2, 3, 4;　　B_2, 1, 3, 4, 5;

B_3: 1, 2, 4, 5;　　B_4: 1, 2, 3, 5;

B_5: 2, 3, 4, 5.

(c) B_1: 1, 2, 3;　　B_2: 4, 5, 6;

B_3: 7, 8, 9;　　B_4: 1, 4, 7;

B_5: 2, 5, 8;　　B_6: 3, 6, 9;

B_7: 1, 5, 9;　　B_8: 2, 6, 7;

B_9: 3, 4, 8;　　B_{10}: 1, 6, 8;

B_{11}: 2, 4, 9;　　B_{12}: 3, 5, 7.

8. 有一 $BIBD$，已知 $b=14, k=3, \lambda=2$ 求 v 和 r。

9. 有一 $BIBD$，已知 $v=15, k=10, \lambda=9$ 求 b 和 v。

10. 已知下列区组

B_1: 1, 2, 3;　B_2: 2, 3, 4;　B_3: 3, 4, 1;　B_4: 4, 1, 2.

试求 AA^T。其中 A 是该区组的区组矩阵。

11. 若已知区组

B_1: 2, 4, 6, 7;　　B_2: 1, 3, 6, 7;

B_3: 3, 4, 5, 7;　　B_4: 1, 2, 5, 7;

B_5: 2, 3, 5, 6;　　B_6: 1, 4, 5, 6;

B_7: 1, 2, 3, 4.

试求 AA^T。A 是该区组的区组矩阵.

12. 若 A 是 (v, k, λ)——设计的区组矩阵，试证

(a) A 的任一列正好有 k 个 1 元素。

(b) A 的任意两列正好有 λ 个行有相同的元素 1。

13. 已知生成矩阵为

$$G=\begin{pmatrix}1&0&0&0&1&0&1\\0&1&0&0&1&1&1\\0&0&1&0&1&1&0\\0&0&0&1&0&1&1\end{pmatrix}$$

试求相应的校验矩阵 H。

14.已知校验矩阵

$$H=\begin{pmatrix}1&1&0&1&1&0&0\\1&0&1&1&0&1&0\\0&1&1&1&0&0&1\end{pmatrix}$$

求相应的生成矩阵。

15.已知生成矩阵

$$G=\begin{pmatrix}1&0&1&1&0\\0&1&0&1&1\end{pmatrix}$$

的码字：

0 0 0 0 0，0 1 0 1 1，1 1 1 0 1，1 0 1 1 0

试分别译出它们的原文。

第六章　线性规划

§1　问题的提出

先考察几个实际问题，然后提出线性规划问题的一般的数学模型。

例 1. 某工厂有 M_1, M_2, M_3 3 种机，各为 m_1, m_2, m_3 台。该厂生产 P_1, P_2, P_3, P_4 4 种产品。每单位产品所需要的机器小时数如下表 6-1-1 所示。

表 6-1-1

机器＼产品	P_1	P_2	P_3	P_4
M_1	t_{11}	t_{12}	t_{13}	t_{14}
M_2	t_{21}	t_{22}	t_{23}	t_{24}
M_3	t_{31}	t_{32}	t_{33}	t_{34}

其中 t_{ij} 为产品 P_j 生产一单位需要机器 M_i 的小时数，$i=1,2,3$，$j=1,2,3,4$。设 4 种产品单位利润分别为 c_1, c_2, c_3, c_4，生产这 4 种产品所用的机器没有先后次序之分，每周机器开动不超过 60 小时。一周内应如何安排各产品的产量才能使所获的利润最大？

设 P_1, P_2, P_3, P_4 4 种产品每周产量分别为 x_1, x_2, x_3, x_4，则问题要求 x_1, x_2, x_3, x_4 在条件允许的范围内使利润达到最大。利润

$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4$. 约束条件是生产这些产品所需要的机器小时数应在允许的范围内，机器 M_i 一周内开动的总机时数为 $60m_i$, $i = 1,2,3$. 于是问题的提法应是

$$\max Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4,$$

满足约束条件：

$$\begin{cases} t_{11}x_1 + t_{12}x_2 + t_{13}x_3 + t_{14}x_4 \leqslant 60m_1, \\ t_{21}x_1 + t_{22}x_2 + t_{23}x_3 + t_{24}x_4 \leqslant 60m_2, \\ t_{31}x_1 + t_{32}x_2 + t_{33}x_3 + t_{34}x_4 \leqslant 60m_3, \end{cases} \tag{6-1-1}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0.$$

$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4$ 称为目标函数，问题要求满足约束条件(5-1-1)使目标函数 Z 达到最大。

例 2. 某饲养场为牲口安排饲料，每头牲口每天需要营养素 i 的量不少于 b_i, $i = 1,2,\cdots,m$. 现有 n 种饲料，设每单位饲料 j 中营养素 i 的含量为 a_{ij}, 饲料 j 的单位价格为 c_j 元，$j = 1,2,\cdots,n$. 在满足营养要求的条件下，如何使饲料成本最低？

设每头牲口每天需要饲料 j 的量为 x_j 单位，问题导致在约束条件

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geqslant b_i,$$
$$i = 1,2,\cdots,m,$$

下使成本

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

达最小值，即

$$\min Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n,$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \geqslant b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \geqslant b_2, \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \geqslant b_m, \end{cases} \tag{6-1-2}$$

$$x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0.$$

例 3. 某种产品有 m 个产地，其产量分别为 $a_1, a_2, \cdots, a_m$；有 n 个销地，需求量分别为 $b_1, b_2, \cdots, b_n$。设从产地 i 运往销地 j 的单位运费为 c_{ij}。且产销平衡，即

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

试问应如何合理地安排产品的调配？

合理的调配应使运输费用达到最少。

设 x_{ij} 表示从产地 i 运往销地 j 的产品量，问题导致求

$$\min z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

满足约束条件

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant a_i, \quad i = 1, 2, \cdots, m. \\ &\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geqslant b_j, \quad j = 1, 2, \cdots, n. \\ x_{ij} \geqslant 0, \quad &i = 1, 2, \cdots, m; \quad j = 1, 2, \cdots, n. \end{aligned} \tag{6-1-3}$$

以上例子归结为同一类的数学问题。目标函数是线性函数，约束条件是一组线性不等式，在满足约束条件的前提下，求目标函数的最大或最小值。

为方便起见，用矩阵形式表示如下。设

$$\mathbf{C} = (c_1c_2\cdots c_n), \quad \mathbf{X} = (x_1x_2\cdots x_n)^T,$$
$$\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n}, \quad \mathbf{b} = (b_1b_2\cdots b_n)^T.$$

线性规划问题

$$\max z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n.$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leqslant b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}a_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leqslant b_2, \\ \quad\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leqslant b_m, \end{cases} \tag{6-1-4}$$

$$x_1, x_2, \cdots x_n \geqslant 0.$$

可表示为

$$\begin{aligned} &\max Z = \mathbf{CX}, \\ &\mathbf{AX} \leqslant \mathbf{b}, \\ &\mathbf{X} \geqslant 0. \end{aligned} \tag{6-1-5}$$

显然，$\max Z = -\min(-Z)$,而 $\mathbf{AX} \leqslant \mathbf{b}$ 与 $(-\mathbf{A})\mathbf{X} \geqslant -\mathbf{b}$等价。所有满足约束条件的 $\mathbf{X}$ 的集合称为允许解域。允许解不存在,或者说允许解域为空集,则线性规划问题无解;而允许解存在,目标函数无上界,上述线性规划问题也无解。允许解存在,而目标函数又有上界,则上述线性规划问题有解。

§2 凸　　集

定义　设 $\mathbf{S}$ 是 n 维欧氏空间的点集，如果任给 X_1，$X_2 \in \mathbf{S}$，$t \in [0,1]$,则 $tX_1 + (1-t)X_2 \in \mathbf{S}$,称 $\mathbf{S}$ 为凸集。

规定空集为凸集,显然凸集的交集为凸集。设 $\mathbf{S} = \{X | \mathbf{A}X \leqslant \mathbf{b}, X \geqslant \mathbf{0}\}$,即线性规划问题的允许解域，则 $\mathbf{S}$ 是凸集。理由如下：

设 X_1，$X_2 \in \mathbf{S}$，$t \in [0, 1]$，$\mathbf{X} = t\mathbf{X}_1 + (1-t)\mathbf{X}_2$，$\mathbf{AX} = \mathbf{A}[t\mathbf{X}_1 + (1-t)\mathbf{X}_2] = t\mathbf{AX}_1 + (1-t)\mathbf{AX}_2 \leqslant \mathbf{b}$，显然，$\mathbf{X} \geqslant 0$，因而 $\mathbf{X} \in \mathbf{S}$。可见允许解域 S 是凸集。允许解域也称为超凸多面体。

定义　设 S 是超凸多面体，$\mathbf{X} \in \mathbf{S}$，如果不存在 X_1，$X_2 \in \mathbf{S}$，$X_1 \neq X_2$，$t \in (0,1)$,使得 $\mathbf{X} = t\mathbf{X}_1 + (1-t)\mathbf{X}_2$,则称 $\mathbf{X}$ 为 $\mathbf{S}$的顶点。

§3 线性规划问题的几何意义

下面举几个简单的例子，以便对线性规划问题有一个几何上的直观了解。

例 1.

$$\max Z = x_1 + x_2,$$

$$\begin{cases}2x_1 + 3x_2 \leqslant 6, \\ 3x_1 + 2x_2 \leqslant 6,\end{cases} \qquad (6\text{-}3\text{-}1)$$

$$x_1, x_2 \geqslant 0.$$

图 6-3-1 的(a),(b),(c) 影线部分的含义如图所标明的；(d)的影线部分便是 (a),(b),(c) 图的交集，即满足问题的所有约束条件域，或简称允许解域。问题便是要求在图(d)所示的域上找使目标函数取极大值的点。

图(e)是目标函数 $z = x_1 + x_2$ 的等位线，由于目标函数是线性函数，故等位线是一组平行线。如箭头所指的垂直于该平行线的方向，是目标函数单调增的方向，直观上很自然得出结论，目标函数只能在允许域的顶点$\left(\frac{6}{5}, \frac{6}{5}\right)$处取得最大值 $z = \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}$.

这里举的是两个变数的情形，对于多个变数其道理还是一样的。由于目标函数是线性函数，即 $z = \mathbf{CX}$ 是线性函数；约束条件 $\mathbf{AX} \leqslant \mathbf{b}$(或 $\geqslant \mathbf{b}$)是线性不等式，线性规划的线性二字源出于此。

例 2. 求 $Z = 3x_1 + 2x_2$ 的最大、最小值。

$$\begin{cases}x_1 + x_2 \leqslant 6, \\ x_1 - x_2 \leqslant 4, \\ x_1 + 3x_2 \geqslant 6, \\ 2x_1 + x_2 \geqslant 4,\end{cases} \qquad (6\text{-}3\text{-}2)$$

$$x_1, x_2 \geqslant 0.$$

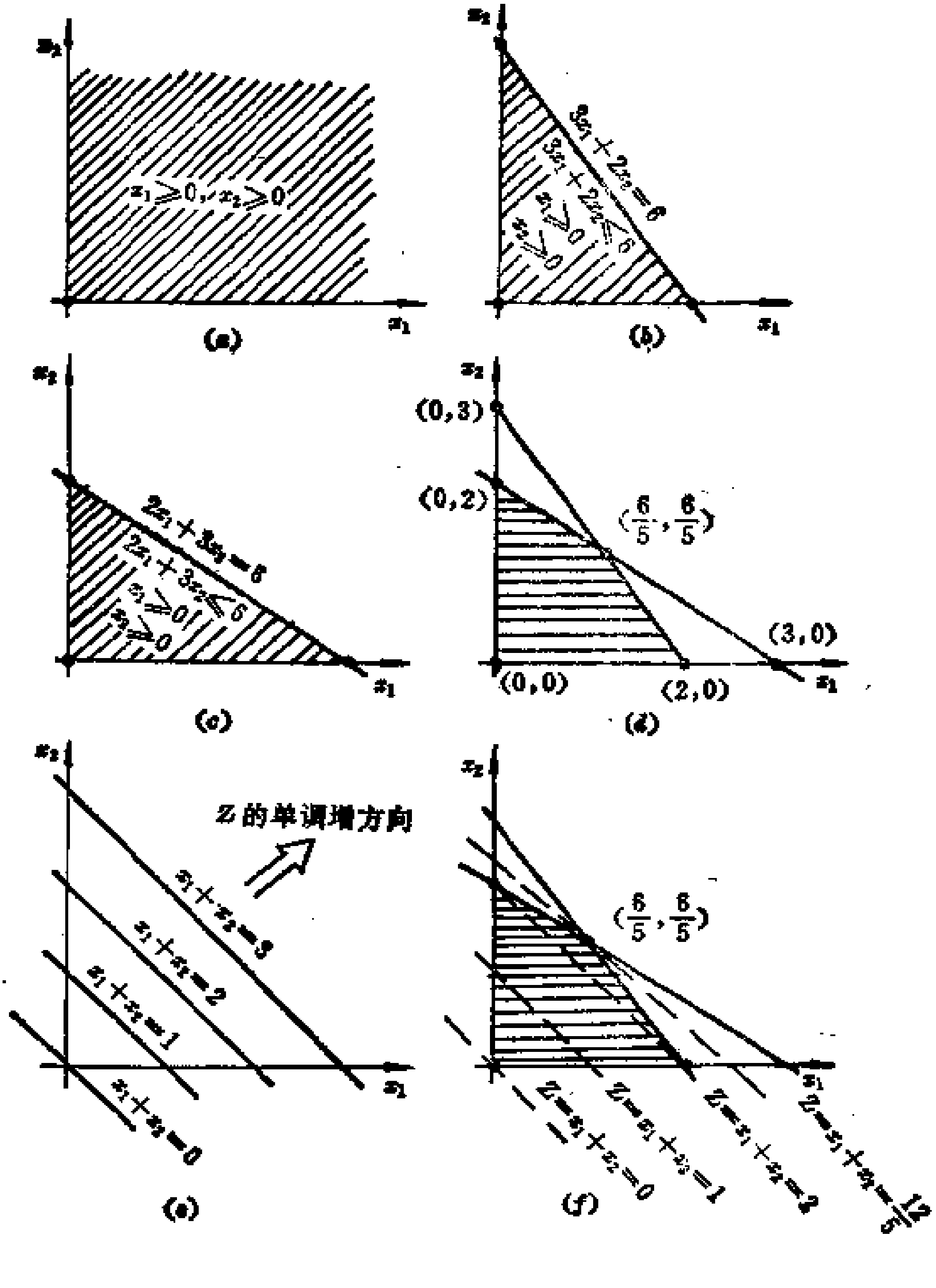

x1≥0, x2≥0
(a)
3x1+2x2=6
3x1+2x2≤6
x1≥0
x2≥0
(b)
2x1+3x2=6
2x1+3x2≤6
x1≥0
x2≥0
(c)
(0,3)
(0,2)
(6/5, 6/5)
(3,0)
(0,0)
(2,0)
(d)
Z的单调增方向
x1+x2=3
x1+x2=2
x1+x2=1
x1+x2=0
(e)
(6/5, 6/5)
Z=x1+x2=0
Z=x1+x2=1
Z=x1+x2=2
Z=x1+x2=12/5
(f)

图 6-3-1

从图 6-3-2 可知 $\max Z = 17$ 在(5,1)点取得，$\min z = 6\frac{4}{5}$，在$\left(\frac{6}{5}, \frac{8}{5}\right)$点取得。

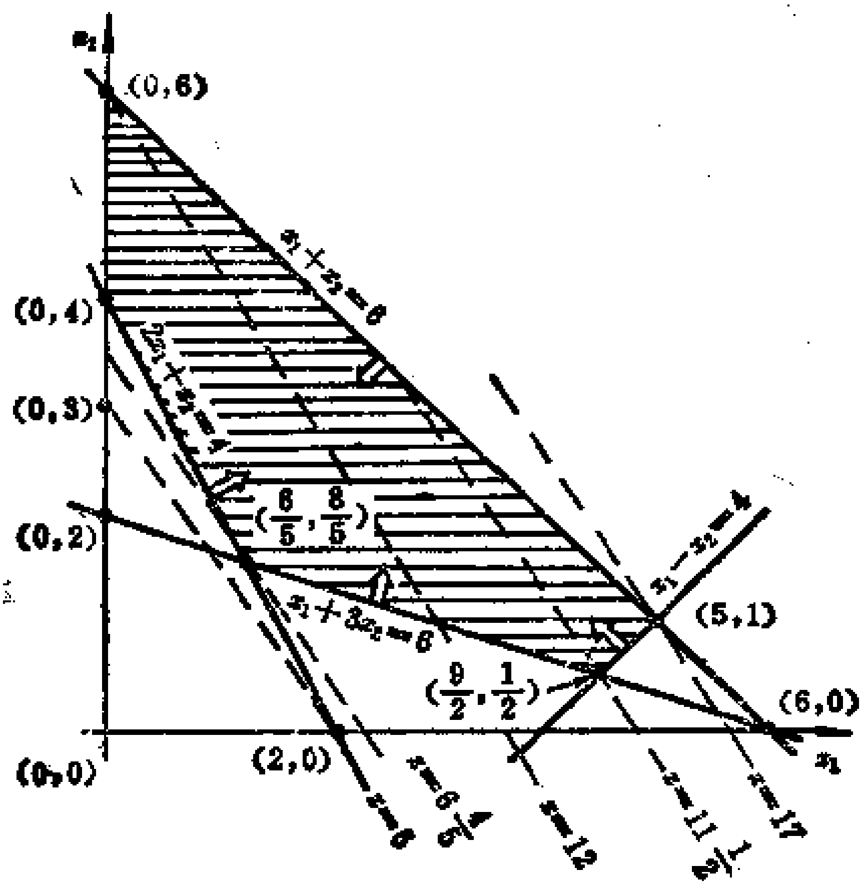


图 6-3-2

例 3. 约束条件和上例一样，求 $z = 2x_1 + 2x_2$ 的最大值，不难看出在(0,6),(5,1)点取得 z 的最大值 12，不仅如此，在(0,6)和(5,1)间的连线上所有的点，z 都是取得值 12，即在这线段上取得极大值.

例 4. 求 $z = x_1 + x_2$ 的最大、最小值。

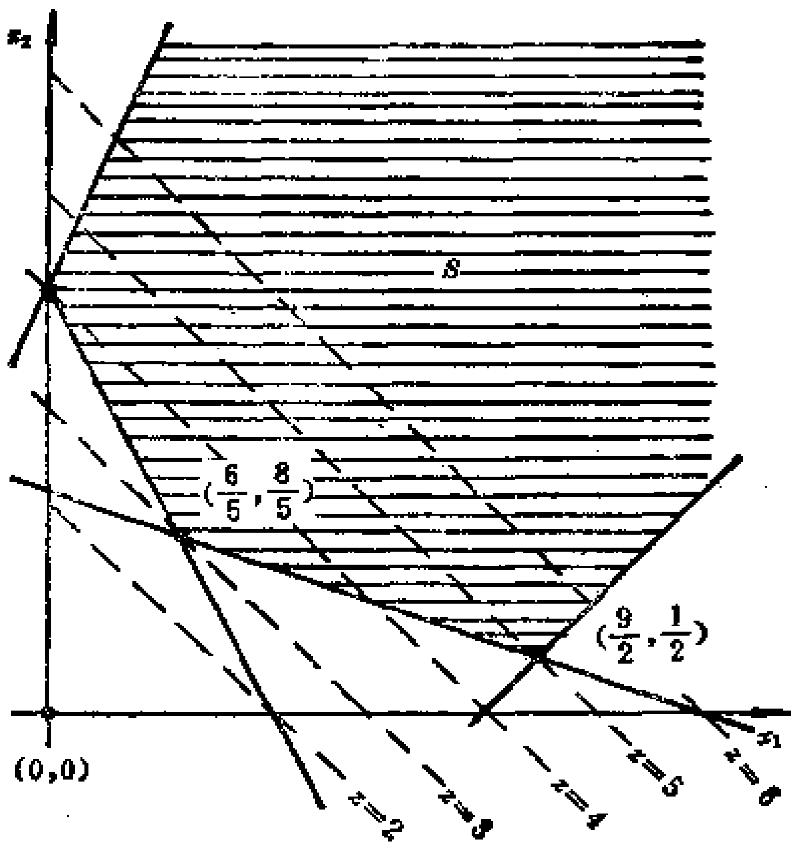


图 6-3-3

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \geqslant 6, \\ 2x_1 + x_2 \geqslant 4, \\ x_1 - x_2 \leqslant 4, \\ 2x_1 - x_2 \geqslant -4, \end{cases} \tag{6-3-3}$$
$$x_1, x_2 \geqslant 0.$$

从图 6-3-3 可知 $z = x_1 + x_2$ 在 S 域上没有最大值。但在 $\left(\frac{6}{5}, \frac{8}{5}\right)$点取得最小值 $z = 2\frac{4}{5}$。

以上几个例子虽然限于二维空间，比较简单，但却启发我们：一个线性规划问题如果有解，或者说有最优解，应当在允许解（超凸多面体）的顶点上取得。如果对于 n 维空间这个命题都是正确的，那么能否只计算某些顶点的函数值来求得最优解？这正是线

性规划问题的单纯形算法的基本思路。

§4 单纯形法理论基础

松弛变量：

从下列问题着手，介绍单纯形法，其它类型问题可以通过它求得解决。

$$\max Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n,$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leqslant b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leqslant b_2, \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leqslant b_m, \end{cases} \tag{6-4-1}$$

$$x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0.$$

如前所述，(6-4-1)也可用矩阵形式表示为

$$\begin{aligned} &\max Z = \mathbf{CX}, \\ &\mathbf{AX} \leqslant \mathbf{b}, \\ &\mathbf{X} \geqslant 0. \end{aligned} \tag{6-4-2}$$

为了讨论方便，把线性不等式组 $\mathbf{AX} \leqslant \mathbf{b}$ 转变为线性方程组，这就要引进松弛变量 $x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots, x_{n+m}$，于是(6-4-1)变成

$$\max Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots c_nx_n + 0x_{n+1} + \cdots + 0x_{n+m},$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m, \end{cases} \tag{6-4-3}$$

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}, \cdots x_{n+m} \geqslant 0.$$

为了简便，也可表示为

$$\begin{aligned} &\max Z = \mathbf{CX}, \\ &\mathbf{AX} = \mathbf{b}, \\ &\mathbf{X} \geqslant 0. \end{aligned} \tag{6-4-4}$$

其中 $\mathbf{X}=(x_1x_2\cdots x_nx_{n+1}\cdots x_{n+m})^T$，

$$\mathbf{C}=(c_1\ c_2\cdots\ c_n\ \underbrace{0\cdots0}_{m个0}),$$

$\mathbf{A}$ 与原来相比，增添了一个 m 阶单位阵 $\mathbf{I}_m$。

令 $\mathbf{S}=\{\mathbf{X}|\mathbf{AX}=\mathbf{b},\ \mathbf{X}\geqslant 0\}$。显然，$\mathbf{S}$ 是超凸多面体。设 $\mathbf{A}=(a_{ij})_{m\times(n+m)}$ 的第 j 列为 $\mathbf{A}_j$。

定理. 设 $\mathbf{X}=(x_1\cdots x_{n+m})^T\in\mathbf{S}$.$\mathbf{X}$ 是 $\mathbf{S}$ 的顶点的充要条件是 $\mathbf{X}$ 的非 0 元对应的 $\mathbf{A}$ 的列向量线性无关。

证: 用反证法。

先证必要性。设 X 是 S 的顶点，不妨设 $X=(x_1\,x_2\cdots x_k\,0\cdots 0)^T$，$x_1,x_2,\cdots,x_k$ 是 X 的非 0 元，$A_1,A_2,\cdots,A_k$ 是与这些非 0 元对应的 A 的列向量。并设 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 线性相关。于是存在一组不全为 0 的常数 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$，使得

$$\alpha_1\mathbf{A}_1+\alpha_2\mathbf{A}_2+\cdots+\alpha_k\mathbf{A}_k=0.$$

令 $\mathbf{Z}=(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k\underbrace{0\cdots0}_{n+m-k个})^T$。存在常数 $\varepsilon>0$，只要 ε 足够小，就有 $\mathbf{X}\pm\varepsilon\mathbf{Z}\in\mathbf{S}$，因为可以使得 $\mathbf{X}\pm\varepsilon\mathbf{Z}\geqslant 0$，并且 $\mathbf{A}(\mathbf{X}\pm\varepsilon\mathbf{Z})=\boldsymbol{b}$。但是

$$\mathbf{X}=\frac{1}{2}(\mathbf{X}+\varepsilon\mathbf{Z})+\frac{1}{2}(\mathbf{X}-\varepsilon\mathbf{Z}),$$

与 $\mathbf{X}$ 是 $\mathbf{S}$ 的顶点矛盾。因而，$\mathbf{A}_1,\mathbf{A}_2,\cdots,\mathbf{A}_k$ 线性无关。

再证充分性。

设 $\mathbf{X}=(x_1x_2\cdots x_k\underbrace{0\cdots0}_{n+m-k})^T\in\mathbf{S}$，$x_1,x_2,\cdots,x_k>0$，$\mathbf{A}_1,\mathbf{A}_2,\cdots,\mathbf{A}_k$ 是这些非 0 元对应的 $\mathbf{A}$ 的列向量，$\mathbf{A}_1,\mathbf{A}_2,\cdots,\mathbf{A}_k$ 线性无关，但 $\mathbf{X}$ 不是 $\mathbf{S}$ 的顶点，于是存在 $\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2\in\mathbf{S}$，$\mathbf{X}_1\neq\mathbf{X}_2$，$t\in(0,1)$，$\mathbf{X}=t\mathbf{X}_1+(1-t)\mathbf{X}_2$。因为 $\mathbf{X}$ 的后 $n+m-k$ 个元都为 0，所以 $\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2$ 的后 $n+m-k$ 个元也都为 0。因而可设

$$\mathbf{X}_1 = (x_1^{(1)}x_2^{(1)}\cdots x_k^{(1)}0\cdots 0)^T,$$
$$\mathbf{X}_2 = (x_1^{(2)}x_2^{(2)}\cdots x_k^{(2)}0\cdots 0)^T.$$

令 $\mathbf{Y} = \mathbf{X} + (\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2) = (y_1y_2\cdots y_k0\cdots 0)^T$. 因为 $\mathbf{X}_1 \neq \mathbf{X}_2$, 所以 $\mathbf{Y} \neq \mathbf{X}$. 因 $\mathbf{A}(\mathbf{Y}-\mathbf{X}) = \mathbf{0}$, 所以

$$(y_1 - x_1)\mathbf{A}_1 + (y_2 - x_2)\mathbf{A}_2 + \cdots + (y_k - x_k)\mathbf{A}_k = \mathbf{0}.$$

这与 $\mathbf{A}_1,\mathbf{A}_2,\cdots,\mathbf{A}_k$ 线性无关矛盾,因而 $\mathbf{X}$ 是 $\mathbf{S}$ 的顶点.

定义. 如果 $\mathbf{b}$ 可以表示为 $\mathbf{A}$ 的少于m个列向量的线性组合,称为退化情况. 否则称为非退化情况.

推论. 在非退化情况下, 设 $\mathbf{X}\in\mathbf{S}$, $\mathbf{X}$ 是 $\mathbf{S}$ 顶点的充要条件是 $\mathbf{X}$ 的非 0 元的个数为 m.

证: 必要性: 设 $\mathbf{X}$ 是 $\mathbf{S}$ 的顶点.

由非退化假设,$\mathbf{X}$ 的非 0 元不少于m个. 根据定理,$\mathbf{X}$ 的非 0 元对应的 $\mathbf{A}$ 的列向量线性无关,而 $\mathbf{A}$ 的秩不大于 m, 故 $\mathbf{A}$ 的线性无关列向量的个数不大于 m,因而 $\mathbf{X}$ 的非 0 元个数为m.

充分性: 设 $\mathbf{X}$ 的非 0 元的个数为 m. $\mathbf{X}$ 的非 0 元对应的$\mathbf{A}$ 的列向量必然线性无关,否则,$\mathbf{b}$ 就可表示为 $\mathbf{A}$ 的少于m个列向量的线性组合,与非退化矛盾. 因而,根据定理,$\mathbf{X}$ 是 $\mathbf{S}$ 的顶点. ∎

定理. 设线性规划问题

$$\max Z = \mathbf{CX},$$
$$\mathbf{AX} = \mathbf{b},$$
$$\mathbf{X} \geqslant \mathbf{0}$$

有解,则必可在 $\mathbf{S} = \{\mathbf{X}\mid\mathbf{AX} = \mathbf{b},\ \mathbf{X}\geqslant\mathbf{0}\}$的某个顶点上取得最大值.

证: 设 $\max Z = M = \mathbf{C}\tilde{\mathbf{X}}$, $\tilde{\mathbf{X}}\in\mathbf{S}$, 但 $\tilde{\mathbf{X}}$ 不是 $\mathbf{S}$ 的顶点. 根据这个假设,$\mathbf{X}\neq\mathbf{0}$,因为如果 $\mathbf{0}\in\mathbf{S}$,则$\mathbf{0}$是 $\mathbf{S}$ 的一个顶点.设

$$\tilde{\mathbf{X}} = (\tilde{x}_1\tilde{x}_2\cdots\tilde{x}_k0\cdots 0)^T,\quad \tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\cdots\tilde{x}_k > 0.$$

$\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\cdots,\tilde{x}_k$ 对应的 $\mathbf{A}$ 的列向量为 $\mathbf{A}_1,\ \mathbf{A}_2,\cdots,\mathbf{A}_k$. $\mathbf{A}_1,\mathbf{A}_2,$

$\cdots, \mathbf{A}_k$ 线性相关．存在不全为 0 的 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$，使得

$$\alpha_1\mathbf{A}_1 + \alpha_2\mathbf{A}_2 + \cdots + \alpha_k\mathbf{A}_k = 0,$$

令 $\mathbf{Z} = (\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k 0\cdots 0)^T$．取适当的 $\varepsilon > 0$，使 $\tilde{\mathbf{X}} + \varepsilon\mathbf{Z} \geqslant 0$，$\tilde{\mathbf{X}} - \varepsilon\mathbf{Z} \geqslant 0$，而且这两个向量中至少有一个的 0 分量的个数比 $\tilde{\mathbf{X}}$ 的多。

由假设，
$$\mathbf{C}(\tilde{\mathbf{X}} + \varepsilon\mathbf{Z}) \leqslant \mathbf{C}\tilde{\mathbf{X}} = M,$$
$$\mathbf{C}(\tilde{\mathbf{X}} - \varepsilon\mathbf{Z}) \leqslant \mathbf{C}\tilde{\mathbf{X}} = M,$$

从而
$$0 \leqslant \varepsilon\mathbf{CZ} \leqslant 0,\ \mathbf{CZ} = 0.$$

于是
$$\mathbf{C}(\tilde{\mathbf{X}} - \varepsilon\mathbf{Z}) = \mathbf{C}(\tilde{\mathbf{X}} + \varepsilon\mathbf{Z}) = \mathbf{C}\tilde{\mathbf{X}} = M.$$

这就是说在 $\mathbf{S}$ 中可找到一个新的点，0元较多，使目标函数值不变（最大）．这样通过有限步可找到 $\mathbf{X}^* \in \mathbf{S}$，其非 0 元对应的 $\mathbf{A}$ 的列向量线性无关，即 $\mathbf{X}^*$ 是 $\mathbf{S}$ 的顶点。

以下讨论若不作特别说明，都是指非退化情况。

为了增加直观了解，举例说明如下．例如

$$\max z = x_1 + x_2,$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leqslant 6, \\ 3x_1 + 2x_2 \leqslant 6, \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \geqslant 0.$$

引进 x_3, x_4 得

$$\max\ z = x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4,$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 6, \end{cases} \tag{6-4-5}$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0.$$

x_3, x_4 称为是松弛变量，它的几何意义见图 6-4-1．
如果说 $x_1 =$ 常数是和 x_2 轴平行的直线族；$x_2 =$ 常数是和 x_1 轴平行的直线族，则 $x_3 =$ 常数是和 $2x_1 + 3x_2 = 6$ 平行的直线族 $2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6$．例如 $2x_1 + 3x_2 = 6$ 对应于 $x_3 = 0$．过(2, 0)点和 $2x_1 + 3x_2 = 6$ 平行的直线为 $2x_1 + 3x_2 = 4$，故为 $x_3 = 2$．

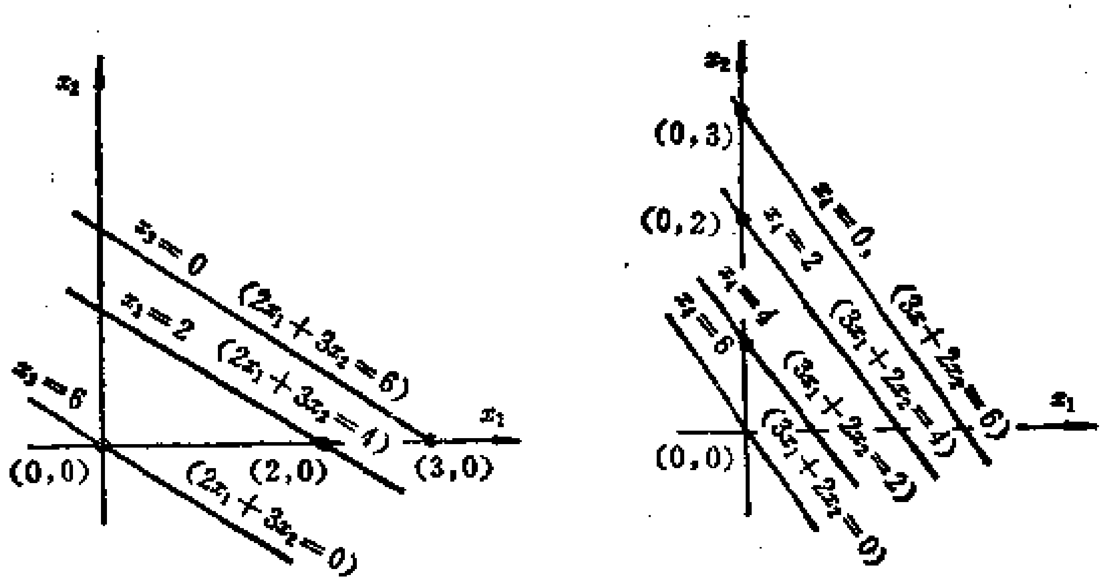


图 6-4-1

如图 6-4-2 所示，凸多边形的边界正好是 $x_1=0, x_2=0, x_3=0, x_4=0$。四个顶点坐标分别是$(0,0,6,6)$，$(2,0,2,0)$，$(0,2,0,2)$，$\left(\frac{6}{5}, \frac{6}{5},0,0\right)$。

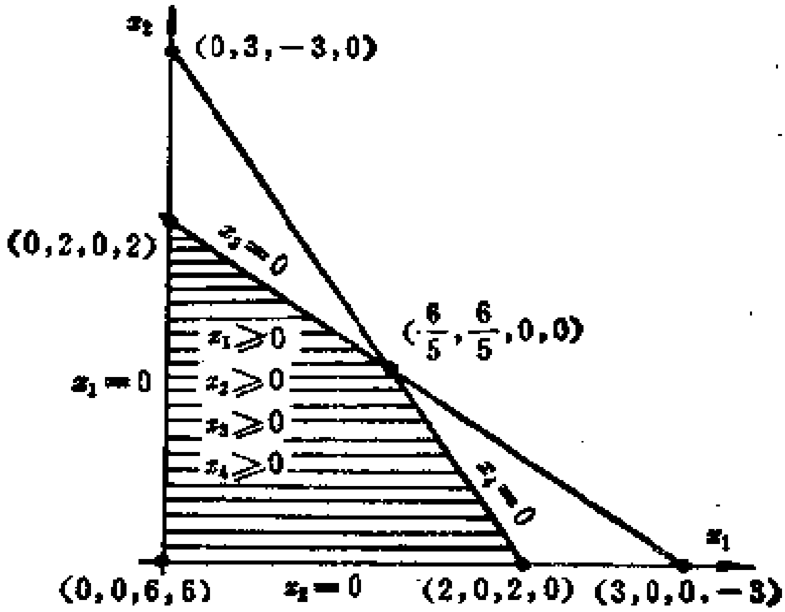


图 6-4-2

请读者注意所有的交点都有两个坐标为零，即为两个边界线的交点。

$$
\begin{array}{rll}
3: & 2x_1 + 3x_2 \ \ + x_3 = 6, & (1)\\
-)2: & 3x_1 + 2x_2 \ \ + x_4 = 6, & (2)\\
\hline
3\cdot(1) - 2\cdot(2): & 5x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, & (3)
\end{array}
$$

$$\therefore \quad \frac{5}{3}x_2 + x_3 - \frac{2}{3}x_4 = 2.$$

和 $3x_1 + 2x_2 + x_4 = 6$，或 $x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_4 = 2$ 并列得

$$
\begin{cases}
x_1 + \frac{2}{3}x_2 \qquad + \frac{1}{3}x_4 = 2,\\
\quad \frac{5}{3}x_2 + x_3 - \frac{2}{3}x_4 = 2,
\end{cases}
$$

可见 $x_1 = 2, x_3 = 2, x_2 = x_4 = 0$，即$(2,0,2,0)$也是一组允许解，而且是允许解域的一个顶点。

§5 单纯形法及单纯形表格

由上节的讨论可知，线性规划问题的允许域是一个超凸多面体，其最优解(若存在)必可在顶点上取得。但是m个约束条件n个变元问题的允许解域可以有$\binom{n+m}{m}$个顶点，当n和m都是大整数时，这可以是一个非常大的数。因此用穷举的方法是行不通的。

1. 基变量

引入松弛变量后，得到(6-4-3)，其矩阵表示为

$$\max z = \mathbf{CX},$$
$$\mathbf{AX} = \mathbf{b}, \tag{6-5-1}$$
$$\mathbf{X} \geq 0.$$

如果 $\mathbf{b} > 0$，则 $X_0 = (0\cdots 0\ b_1 b_2 \cdots b_m)^T$是 $\mathbf{S}$ 的顶点．单纯形法的基本思路是从 $\mathbf{X}_0$ 出发，换到 $\mathbf{S}$ 的与 $\mathbf{X}_0$ 相邻的顶点，使目标函数有所改善．经过有限步使达到最优．顶点的非 0 元称为基变量，基变量对应的A的列向量称为基．从一个顶点换到相邻顶点的方法是高斯消去法，即用行的初等变换进行列消元的方法．为了避免混淆，用 $\mathbf{A}_1,\mathbf{A}_2,\cdots,\mathbf{A}_n,\mathbf{A}_{n+1},\cdots,\mathbf{A}_{n+m}$ 表示 $\mathbf{A}$ 的列向量．用 $\mathbf{P}_0,\mathbf{P}_1,\cdots,\mathbf{P}_n,\mathbf{P}_{n+1},\cdots,\mathbf{P}_{n+m}$ 表示 $\mathbf{b}$ 及 $\mathbf{A}$ 的列向量经过行的初等变换得到的列向量．设

$$\mathbf{P} = (\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\cdots\mathbf{P}_n\mathbf{P}_{n-1}\cdots\mathbf{P}_{n+m}).$$

在 P 中始终有一组构成m阶单位阵的列向量．我们知道对矩阵进行的初等变换相当于左乘一个适当的可逆矩阵．不难看出，在这里适当的可逆矩阵就是对应的m个线性无关的A的列构成的矩阵的逆矩阵．设 X_1 是 S 的顶点，不妨设 $X_1 = (\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m 0\cdots 0)^T$，其中 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m > 0$，是基变量，它们构成列向量 P_0．设 B 是基变量对应的A的列向量构成的可逆矩阵，也称为基阵．不妨设

$$\mathbf{B} = (\mathbf{A}_1\ \mathbf{A}_2\cdots\mathbf{A}_m).$$

于是

$$\mathbf{A} = (\mathbf{BN}),$$

其中

$$\mathbf{N} = (\mathbf{A}_{m+1}\cdots\mathbf{A}_{m+n}).$$

将上述综合起来有

$$\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{b}\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\cdots\mathbf{A}_{n+m}) = (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\cdots\mathbf{P}_{n+m}).$$

由前设可知

$$\mathbf{P}_0 = (\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m)^T.$$

再设

$$\mathbf{P}_j=(\alpha_{1j}\alpha_{2j}\cdots\alpha_{mj})^T,$$

这样就有

$$\mathbf{BP}_j=\mathbf{A}_j,\ \mathbf{BP}_0=\mathbf{b},$$

$$\mathbf{A}_j=\alpha_{1j}\mathbf{A}_1+\alpha_{2j}\mathbf{A}_2+\cdots+\alpha_{mj}\mathbf{A}_m,$$

$$\mathbf{b}=\alpha_1\mathbf{A}_1+\alpha_2\mathbf{A}_2+\cdots+\alpha_m\mathbf{A}_m.$$

目标函数值 $z(\mathbf{X}_1)=c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+\cdots+c_m\alpha_m.$

2. 基的选进和退出

从一个顶点换到相邻的顶点，相应地表现为一个非基列向量选为基，同时一个原来的基变成非基。在此过程中一是要使目标函数有改善，二是要满足约束条件。

先看 A_j 能否进入，再看哪一个列该退出。

$$\mathbf{b}=\alpha_1\mathbf{A}_1+\alpha_2\mathbf{A}_2+\cdots+\alpha_m\mathbf{A}_m,$$

$$-\beta\mathbf{A}_j=-\beta(\alpha_{1j}\mathbf{A}_1+\alpha_{2j}\mathbf{A}_2+\cdots+\alpha_{mj}\mathbf{A}_m),$$

$$\mathbf{b}=\sum_{i=1}^{m}(\alpha_i-\beta\alpha_{ij})\mathbf{A}_i+\beta\mathbf{A}_j,\quad j=m+1,\cdots,m+n.$$

要从原来的顶点换到新的顶点，就得使 b 仍然表示为恰好 m 个 $\mathbf{A}$ 的列向量的线性组合，并且在此组合中 m 个列向量前面的系数都是正的。为此，令

$$\beta=\min_i\left\{\frac{\alpha_i}{\alpha_{ij}}\,\middle|\,\alpha_{ij}>0\right\},\qquad(6\text{-}5\text{-}2)$$

设 $\beta=\dfrac{\alpha_k}{\alpha_{kj}}$，于是 $\alpha_k-\beta\alpha_{kj}=0$。从而 $\mathbf{A}_k$ 退出基阵，$\mathbf{A}_j$ 进入基阵。

设 $\mathbf{X}_2$ 是新的顶点，有

$$\mathbf{X}_2=(\alpha_1-\beta\alpha_{1j}\ \alpha_2-\beta\alpha_{2j}\cdots\underset{\text{第}k\text{个}}{\underset{\uparrow}{0}}\cdots\alpha_m-\beta\alpha_{mj}\ 0\cdots\underset{\text{第}j\text{个}}{\underset{\uparrow}{\beta}}\cdots0)^T.$$

新顶点 X_2 的目标函数值是

$$z(X_2) = \sum_{i=1}^{m} c_i(\alpha_i - \beta\alpha_{ij}) + c_j\beta$$

$$= \sum_{i=1}^{m} c_i\alpha_i + \beta\left(c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i\alpha_{ij}\right),$$

设 $\mathbf{C}_B$ 表示 $\mathbf{X}_1$ 的基变量在目标函数中的系数构成的 m 维行向量。根据前设有

$$z(X_2) = z(X_1) + \beta(c_j - \mathbf{C}_B\mathbf{P}_j),$$

或表示为增量

$$\Delta \mathbf{Z} = \beta(c_j - \mathbf{C}_B\mathbf{P}_j).$$

请注意 $\mathbf{P}_j = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_j$，于是 $\mathbf{C}_B\mathbf{P}_j = \mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_j$。同时，$z(\mathbf{X}_1) = \mathbf{C}_B\mathbf{P}_0 = \mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$。为了讨论方便，令

$$z_j = \mathbf{C}_B\mathbf{P}_j = \mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_j, \quad \lambda_j = c_j - z_j, \tag{6-5-2}$$

若 $\lambda_j > 0$，则 $\mathbf{A}_j$ 进入基阵可使目标函数增大，若 $\lambda_j < 0$，则 $\mathbf{A}_j$ 进入基阵可使目标函数减小。若进入基 $\mathbf{A}_j$ 可使目标函数得到改善，但 $\mathbf{P}_j \leqslant 0$，则目标函数在优化方向上无界，该问题就无解。

定理。设 $\mathbf{X} = (\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m 0\cdots 0)^T$ 是线性规化问题(6-4-2)的一个解，$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \cdots, \mathbf{A}_m$ 是 $\mathbf{X}$ 的正元对应的基。如果 $\lambda_j \leqslant 0$，$j = 1,2,\cdots,n+m$，则 $\mathbf{X}$ 是最大值点。其中 $\lambda_j = c_j - \mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_j$，$\mathbf{B} = (\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\cdots\mathbf{A}_m)$。

证：设 $\mathbf{S}$ 是(6-4-2)的允许解域，任给 $\mathbf{Y} \in \mathbf{S}$，$z(\mathbf{Y}) = \mathbf{CY}$。根据假设 $\lambda_j \leqslant 0$，即 $c_j \leqslant z_j$，$j = 1,2,\cdots,n+m$。写成矩阵形式就是

$$\mathbf{C} \leqslant (\mathbf{C}_B\mathbf{P}_1, \mathbf{C}_B\mathbf{P}_2, \cdots, \mathbf{C}_B\mathbf{P}_{n+m}),$$
$$\mathbf{C} \leqslant (\mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_1, \mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_2, \cdots, \mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_{n+m}),$$
$$\mathbf{C} \leqslant \mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A},$$

于是

$$\mathbf{CY} \leqslant \mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{AY},$$

$$CY \leqslant C_B B^{-1} b,$$

而 $B^{-1}b = P_0$，$C_B P_0 = CX$。从而

$$CY \leqslant CX,$$

即 X 是最大值点。

以上对单纯形法的理论及基本计算步骤进行了讨论。单纯形法是一个反复迭代的过程，有一定的规律可以遵循，便于化为表上作业法。为了表明前后关系，把前面的符号重新规定如下。

问题为：

$$\max z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_{n+m} x_{n+m},$$

约束条件：

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(0)} a_{12}^{(0)} \cdots a_{1,n+m}^{(0)} \\ a_{21}^{(0)} a_{22}^{(0)} \cdots a_{2,n+m}^{(0)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}^{(0)} a_{m2}^{(0)} \cdots a_{m,n+m}^{(0)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^{(0)} \\ b_2^{(0)} \\ \vdots \\ b_m^{(0)} \end{pmatrix},$$

$$x_1, x_2, \cdots, x_{n+m} \geqslant 0.$$

其中

$$c_{n+1} = c_{n+2} = \cdots = c_{n+m} = 0.$$

$$P_j = (a_{1j}^{(0)} a_{2j}^{(0)} \cdots\cdots a_{mj}^{(0)})^T,\ j = 1, 2, \cdots, n+m.$$

$$P_0 = (b_1^{(0)} b_2^{(0)} \cdots b_m^{(0)})^T.$$

然后把上面数据填入下面表 6-5-1 中作为第一步。

(1) 计算 z^0 及 $c_j - z_j$。

如果 $c_j - z_j \leqslant 0$，$j = 1, 2, \cdots, n+m$，则不可能使目标函数有所改善，故问题的最优解应是

$$x_{b_1} = b_1^{(0)},\ x_{b_2} = b_2^{(0)}, \cdots, x_{b_m} = b_m^{(0)},$$

$$x_j = 0,\ j \neq b_1, b_2, \cdots, b_m,\ 1 \leqslant j \leqslant n+m.$$

这时目标函数值即为 z^0。

(2) 如若不然，进入的基 P_j 的选取应满足

$$c_j - z_j > 0$$

表 6-5-1

基底 $\mathbf{P}_B$[1]	$\mathbf{C}_B$	$\mathbf{P}_j$ \ $\mathbf{C}$ \ $\mathbf{P}_0$	$\mathbf{P}_1$	$\mathbf{P}_2$	……	$\mathbf{P}_j$	……	$\mathbf{P}_{n+m}$	β
			c_1	c_2	……	c_j	……	c_{n+m}	
$\mathbf{P}_{b_1}$	c_{b_1}	$b_1^{(0)}$	$a_{11}^{(0)}$	$a_{12}^{(0)}$	……	$a_{1j}^{(0)}$	……	$a_{1,n+m}^{(0)}$	$\beta=\frac{b_k^{(0)}}{a_{kj}^{(0)}}=\min_i\left\{\frac{b_i^{(0)}}{a_{ij}^{(0)}}\middle\vert a_{ij}^{(0)}>0\right\}$
$\mathbf{P}_{b_2}$	c_{b_2}	$b_2^{(0)}$	$a_{21}^{(0)}$	$a_{22}^{(0)}$	……	$a_{2j}^{(0)}$	……	$a_{2,n+m}^{(0)}$	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	……	⋮	……	⋮	
$\mathbf{P}_{b_k}$	c_{b_k}	$b_k^{(0)}$	$a_{k1}^{(0)}$	$a_{k2}^{(0)}$	……	$(a_{kj}^{(0)})$		$a_{k,n+m}^{(0)}$	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	……	⋮	……	⋮	
$\mathbf{P}_{b_m}$	c_{b_m}	$b_m^{(0)}$	$a_{m1}^{(0)}$	$a_{m2}^{(0)}$	……	$a_{mj}^{(0)}$	……	$a_{m,n+m}^{(0)}$	
		z^0	$\lambda_1^{(0)}$	$\lambda_2^{(0)}$	……	$\lambda_j^{(0)}$	……	$\lambda_{n+m}^{(0)}$	

注：1）这一列所给出的A的列向量按所给顺序构成B 矩阵，B^{-1} 就是行的初等变换对应的左乘矩阵.

然而当 n 很大时，增加了许多计算量，所以也可以选第一个 $c_j-z_j>0$。

确定了进入基 $\mathbf{P}_j$ 后，计算

$$\beta=\frac{b_k^{(0)}}{a_{kj}^{(0)}}=\min_i\left\{\frac{b_i^{(0)}}{a_{ij}^{(0)}}\middle\vert a_{ij}^{(0)}>0\right\}$$

以确定退出的基 $\mathbf{P}_k$。

(3) 表中第 k 行第 j 列元素 $a_{kj}^{(0)}$ 取作主元素，对第 j 列进行消元。即作

$$b_k^{(1)}=b_k^{(0)}/a_{kj}^{(0)},\quad a_{ki}^{(1)}=a_{ki}^{(0)}/a_{kj}^{(0)},\quad i=1,2,\cdots,n+m.$$

$$b_i^{(1)}=b_i^{(0)}-\frac{b_k^{(0)}}{a_{kj}^{(0)}}a_{ij}^{(0)},\ i=1,2,\cdots,k-1,k+1,\cdots,m.$$

$$a_{il}^{(1)} = a_{il}^{(0)} - \frac{a_{kl}^{(0)}}{a_{kj}^{(0)}} a_{ij}^{(0)}, \quad \begin{array}{l} i = 1,2,\cdots,k-1,\ k+1,\cdots,m, \\ l = 1,2,\cdots,j-1,j+1,\cdots,n+m. \end{array}$$

$$\lambda_l^{(1)} = \lambda_l^{(0)} - \frac{a_{kl}^{(0)}}{a_{kj}^{(0)}} \lambda_j^{(0)},\ l = 1,2,\cdots,j-1,j+1,\cdots,n+m.$$

$$z^{(1)} = z^{(0)} + \beta \lambda_j^{(0)}.$$

①下面说明为什么在以 $a_{kj}^{(0)}$ 为主元进行消元时，行向量 $(\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_j \cdots \lambda_{n+m})$ 可以一并进行。

按规定应有

$$z_l^{(1)} = c_{b_1}\left(a_{1l}^{(0)} - \frac{a_{kl}^{(0)}}{a_{kj}^{(0)}} a_{1j}^{(0)}\right) + c_{b_2}\left(a_{2l}^{(0)} - \frac{a_{kl}^{(0)}}{a_{kj}^{(0)}} a_{2j}^{(0)}\right)$$

$$+ \cdots + c_j \frac{a_{kl}^{(0)}}{a_{kj}^{(0)}} + \cdots + c_{b_m}\left(a_{ml}^{(0)} - \frac{a_{kl}^{(0)}}{a_{kj}^{(0)}} a_{mj}^{(0)}\right)$$

表 6-5-2

基底 P_B	C_B	P_j \ C \ P_0	P_1	P_2	……	P_j	……	P_{n+m}	β
			c_1	c_2	……	c_j	……	c_{n+m}	
P_{b_1}	c_{b_1}	$b_1^{(1)}$	$a_{11}^{(1)}$	$a_{12}^{(1)}$	……	0	……	$a_{1,n+m}^{(1)}$	$\min_i\left\{\frac{b_i^{(1)}}{a_{ij}^{(1)}} \middle\vert a_{ij}^{(1)} > 0\right\} = \frac{b_l^{(1)}}{a_{lj}^{(1)}} = \theta$
P_{b_2}	c_{b_2}	$b_2^{(1)}$	$b_{21}^{(1)}$	$a_{22}^{(1)}$	……	0	……	$a_{2,n+m}^{(1)}$	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	……	⋮	……	⋮	
P_{b_k}	c_{b_k}	$b_k^{(1)}$	$a_{k1}^{(1)}$	$a_{k2}^{(1)}$	……	1	……	$a_{k,n+m}^{(1)}$	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	……	⋮	……	⋮	
P_{b_m}	c_{b_m}	$b_m^{(1)}$	$a_{m1}^{(1)}$	$a_{m2}^{(1)}$	……	0	……	$a_{m,n+m}^{(1)}$	
		$z^{(1)}$	$\lambda_1^{(1)}$	$\lambda_2^{(1)}$	……	0	……	$\lambda_{n+m}^{(1)}$	

$$= C_B P_j^{(0)} - c_{b_k} a_{kj}^{(0)} + c_l \frac{a_{kj}^{(0)}}{a_{kl}^{(0)}} - \frac{a_{kj}^{(0)}}{a_{kl}^{(0)}} (C_B P_l^{(0)} - c_{b_k} a_{kl}^{(0)})$$

$$= z_j^{(0)} + \frac{a_{kj}^{(0)}}{a_{kl}^{(0)}} (c_l - z_l^{(0)}),$$

所以，

$$c_j - z_j^{(1)} = c_j - z_j^{(0)} - \frac{a_{kj}^{(0)}}{a_{kl}^{(0)}} (c_l - z_l^{(0)}),$$

即

$$\lambda_j^{(1)} = \lambda_j^{(0)} - \frac{a_{kj}^{(0)}}{a_{kl}^{(0)}} \lambda_l^{(0)}.$$

把所得的结果写入下表 6-5-2，返回(1)。这样周而复始，直至达到最优。

例 1.

$$\max z = 3x_1 + 6x_2 + 2x_3,$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 \leqslant 2, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leqslant 1, \end{cases}$$

表 6-5-3

基底 P_B	C_B	P_j / C / P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	β
			3	6	2	0	0	
P_4	0	2	3	4	1	1	0	1/2
P_5	0	1	1	(3)	2	0	1	(1/3)
		0	3	(6)	2	0	0	
P_4	0	2/3	(5/3)	0	−5/3	1	−4/3	(2/5)
P_2	6	1/3	1/3	1	2/3	0	1/3	1
		2	(1)	0	−2	0	−2	
P_1	3	2/5	1	0	−1	3/5	−4/5	
P_2	6	1/5	0	1	1	−1/5	3/5	
		12/5	0	0	−1	−3/5	−5/6	

$$x_1,\ x_2,\ x_3 \geqslant 0.$$

引进松弛变量 x_4, x_5。

$$\max z = 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 0x_4 + 0x_5,$$

$$\begin{cases}3x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_5 = 1,\end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqslant 0.$$

结果如表 6-5-3。

故最优解为 $x_1 = 2/5, x_2 = 1/5$，目标函数为 $z = 12/5$。

例2. $\max z = x_1 + 2x_5 - x_6,$

表 6-5-4

基底 P_B	C_B	P_0 \ P_j / C	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	
			1	0	0	0	2	−1	
P_4	0	45/7	$-\frac{12}{7}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{5}{14}$	1	0	0	90
P_5	2	5/7	$\frac{1}{7}$	$-\frac{3}{14}$	$-\frac{1}{14}$	0	1	0	
P_6	−1	6/7	$-\frac{3}{7}$	$\left(\frac{1}{7}\right)$	$-\frac{2}{7}$	0	0	1	(6)
		$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\left(\frac{4}{7}\right)$	$-\frac{1}{7}$	0	0	0	
P_4	0	6	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	0	−1/2	
P_5	2	2	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	3/2	
P_2	0	6	−3	1	−2	0	0	7	
		4	(2)	0	1	0	0	−4	

$$\begin{cases} -\frac{12}{7}x_1 + \frac{1}{14}x_2 + \frac{5}{14}x_3 + x_4 = \frac{45}{7}, \\ \frac{1}{7}x_1 - \frac{3}{14}x_2 - \frac{1}{14}x_3 + x_5 = \frac{5}{7}, \\ -\frac{3}{7}x_1 + \frac{1}{7}x_2 - \frac{2}{7}x_3 + x_6 = \frac{6}{7}, \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geqslant 0.$$

下面是问题的单纯形表 6-5-4.

由于 $c_1 - z_1 > 0$,但 $\mathbf{P}_1 = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, -3\right)^T$ 所有元素均为负数,故问题无界.

§6 改善的单纯形法表格

单纯形法至今依然是线性规划的有效算法. 但仔细观察,不难发现有些计算不是必要的. 单纯形法在进行列消元时相当于左乘以某一基矩阵 B 的逆. 所以计算 B^{-1}是关键. 若求得 $\mathbf{B}^{-1}$, 便可以计算

$$\mathbf{P}_j = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_j, \qquad \lambda_j = C_j - Z_j = C_j - \mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_j.$$

因而计算 λ_j 时 $\mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}$ 是公共部分,可以先计算. 因

$$\mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_j = (\mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1})\mathbf{A}_j = \mathbf{C}_B(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_j),$$

所以在原有的单纯形表格中要增加一列 $\mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}$,但 $\mathbf{B}^{-1}$ 可存于 A 中 m 阶单位矩阵的单元中.

B	$\mathbf{C}_B$	$\mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}$	$\mathbf{P}_0$	$\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\cdots\mathbf{P}_n\mathbf{P}_{n+1}\cdots\mathbf{P}_{n+m}$ $C_1C_2\cdots C_nC_{n+1}\cdots C_{n+m}$	β

对于问题(6-4-3)改善的单纯形法计算步骤如下：

(a) 计算 $\mathbf{B}^{-1}$,$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$,

(b) 计算 $\mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}$,$\mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$,

(c) 计算 $\lambda_j = C_j - C_B B^{-1} A_j$, $j = 1,2,\cdots, n+m$。若所有 $\lambda_j \leqslant 0$,计算结束。由 $\mathbf{P}_0$ 所确定的 $\mathbf{Z}(X)$ 便是所求的目标函数最大值。否则令

$$c_j - z_j = \max\{c_l - z_l \mid c_l - z_l > 0\}.$$

(d) $\mathbf{P}_j' = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_j$,计算相应的 β,确定主元素及退出基,设为 $\mathbf{P}_k$。以 $\mathbf{A}_j$ 取代 $\mathbf{A}_k$,返回 (a)。

这里并未涉及如何计算以 $\mathbf{A}_j$ 取代 $\mathbf{A}_k$ 后的基矩阵 $\mathbf{B}$ 的逆 $\mathbf{B}^{-1}$。它相当于已知矩阵

$$\mathbf{B}_{old} = (b_1\ b_2 \cdots \underset{\substack{\uparrow \\ \text{第}k\text{列}}}{b_k} \cdots b_m)$$

的逆 B_{old}^{-1}。若用一列矩阵 $\mathbf{b}$ 取代其中 b_k。得

$$\mathbf{B}_{new} = (b_1\ \ b_2 \cdots \underset{\substack{\uparrow \\ \text{第}k\text{列}}}{b} \cdots b_m).$$

求 $\mathbf{B}_{new}^{-1}$。求 $\mathbf{B}_{new}^{-1}$ 的过程是否可以利用已知的 $\mathbf{B}_{old}^{-1}$ 的信息？答案是肯定。

令

$$\mathbf{B}_{old}\mathbf{Y} = \mathbf{P}$$

则

$$\mathbf{Y} = \mathbf{B}_{old}^{-1}\mathbf{P} = (y_1\, y_2 \cdots y_m)^T$$

作

$$\mathbf{E}_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & y_1 & & 0 \\ 0 & 1 & y_2 & & 0 \\ 0 & 0 & \ddots\ y_3 & & 0 \\ \vdots & \vdots & y_k & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \underset{\substack{\uparrow \\ \text{第}k\text{列}}}{y_m} & & 1 \end{pmatrix}$$

显然有

$$\mathbf{B}_{old}\mathbf{E}_k = \mathbf{B}_{new}$$

$$\therefore \quad \mathbf{B}_{new}^{-1} = \mathbf{E}_k^{-1}\mathbf{B}_{old}^{-1}.$$

可从著名的 Jordan 矩阵求逆的方法中获得 $\mathbf{E}_k^{-1}$。即通过行变换从

$$(\mathbf{E}_k \vdots \mathbf{E}_{(m)}) \Rightarrow (\mathbf{E}_{(m)} \vdots \mathbf{E}_k^{-1})$$

其中 $\mathbf{E}_{(m)}$ 是 $m \times m$ 的单位矩阵。

同样的理由可通过类似的行变换可得 $\mathbf{B}_{new}^{-1}$ 如下：

$$(\mathbf{E}_k \vdots \mathbf{B}_{old}^{-1}) \Rightarrow (\mathbf{E}_{(m)} \vdots \mathbf{E}_k^{-1}\mathbf{B}_{old}^{-1}) = (\mathbf{E}_{(m)} \vdots \mathbf{B}_{new}^{-1}).$$

且不难可得

$$\mathbf{E}_k^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & & -y_1/y_k & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & -y_2/y_k & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & -y_3/y_k & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & & & & 1/y_k & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & -y_m/y_k & & 1 \end{pmatrix}$$

实际上可得求 $\mathbf{B}_{new}^{-1}$ 的紧凑表格如下：

$$(\mathbf{Y} \vdots \mathbf{B}_{old}^{-1}) \Rightarrow (\mathbf{E}_k \vdots \mathbf{B}_{new}^{-1}).$$

其中 $\mathbf{E}_k$ 为

$$(0\ 0 \cdots 0\ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{第 } k \text{ 个元素}}}{1}\ 0 \cdots 0)^T.$$

因此可得改善的单纯形表 6-6-1 如下：

例.

$$\max z = -x_1 - x_2 + 4x_3,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \leqslant 9, \\ x_1 + x_2 - x_3 \leqslant 2, \\ -x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 4, \end{cases}$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3 \geqslant 0.$$

引进松弛变量 x_4, x_5, x_6，得

表 6-6-1

B	C_B	C_BB^{-1}	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	β
				-1	-1	4	0	0	0	
P_4	0	0	9	1	1	2	1	0	0	
P_5	0	0	2	1	1	-1	0	1	0	
P_6	0	0	4	-1	1	①	0	0	1	4
			0			4				
P_4	0	0	1	③		0	1	0	-2	1/3
P_5	0	0	6	0		0	0	1	1	
P_3	4	4	4	-1		1	0	0	1	
			16	3						
P_1	-1	1	1/3				1/3	0	$-2/3$	
P_5	0	0	6				0	1	1	
P_3	4	2	13/3				1/3	0	1/3	
			17	0	-4	0	1	0	-2	

$$\max z = -x_1 - x_2 + 4x_3,$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 9, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 2, \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_6 = 4, \end{cases}$$

结果如表 6-6-1。 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geqslant 0$。

请注意，在上面的单纯形法中，当出现 $c_3 - z_3 = 4 > 0$，便可立即判定可取 $\mathbf{P}_3$ 作为进入基，相应地确定 $\mathbf{P}_6$ 退出。只要对 $\mathbf{P}_3$ 进行列消元，使之出现

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

则相应可得新的 $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_4, \mathbf{P}_5, \mathbf{P}_6$ 便是所求的 $\mathbf{P}_0$ 及新的逆矩阵。即

以 $\mathbf{P}_4,\mathbf{P}_5,\mathbf{P}_3$ 为基的逆矩阵便是

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

或写成

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\0 & 1 & -1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

这时新的 $\mathbf{P}_0$ 为

$$\begin{pmatrix}1\\6\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9\\2\\4\end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}=(0\ \ 0\ \ 4)\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}=(0\ \ 0\ \ 4).$$

这样，其它不必要的计算可以省去。第二步计算得 $\mathbf{P}_1$ 作为进入基时，必须计算 $\bar{\mathbf{P}}_1=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_1$。$\bar{\mathbf{P}}_1$ 表示新的 $\mathbf{P}_1$。

§7 二 阶 段 法

线性规划问题的最优解在允许解域的顶点取得。单纯形法的基本思想是从一个顶点出发找到另一个顶点，使目标函数值有所改善，经过有限步便可得到最优解。但有一个前提，必须找到一个属于允许解域的顶点。如若不然单纯形法便遇到困难。下面介绍二阶段法，二阶段法的第一阶段设法找到一顶点，第二阶段从此起步。举例如下。

例： $\min z=2x_1+x_2,$

表 6-7-1

基底 P_B	C_B	P_j \ C \ P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	θ
			0	0	0	0	0	1	1	1	
P_6	1	3	(3)	1	−1	0	0	1	0	0	(1)
P_7	1	6	4	3	0	−1	0	0	1	0	3/2
P_8	1	2	1	2	0	0	−1	0	0	1	2
		11	(−8)	−6	+1	+1	+1	0	0	0	
P_1	0	1	1	1/3	−1/3	0	0	1/3	0	0	3
P_7	1	2	0	5/3	4/3	−1	0	−4/3	1	0	6/5
P_8	1	1	0	(5/3)	1/3	0	−1	−1/3	0	1	(3/5)
		3	0	(−10/3)	−5/3	1	1	8/3	0	0	
P_1	0	4/5	1	0	−2/5	0	1/5	2/5	0	−1/5	4
P_7	1	1	0	0	1	−1	(1)	−1	1	−1	(1)
P_2	0	3/5	0	1	1/5	0	−3/5	−1/5	0	3/5	
		1	0	0	−1	+1	(−1)	2	0	2	
P_1	0	3/5	1	0	−3/5	1/5	0	3/5	−1/5	0	
P_5	0	1	0	0	1	−1	1	−1	1	−1	
P_2	0	6/5	0	1	4/5	−3/5	0	−4/5	3/5	0	
		0	0	0	0	0	0	1	1	1	

表 6-7-2

底基 P_B	C_B	P_j \ C \ P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	θ
			2	1	0	0	0	
P_1	2	3/5	1	0	−3/5	1/5	0	
P_5	0	1	0	0	1	−1	1	
P_2	1	6/5	0	1	4/5	−3/5	0	
		12/5	0	0	2/5	1/5	0	

表 6-7-3

B	C_B	C_BB^{-1}	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	β
				0	0	0	0	0	1	1	1	
P_6	1	1	3	③	1	−1	0	0	1	0	0	1
P_7	1	1	6	4	3	0	−1	0	0	1	0	
P_8	1	1	2	1	2	0	0	−1	0	0	1	
			11	−8								
P_1	0	−5/3	1	1	1/3				1/3	0	0	
P_7	1	1	2	0	5/3				−4/3	1	0	
P_8	1	1	1	0	(5/3)				−1/3	0	1	3/5
			3		−10/3							
P_1	0	−1	4/5		0			1/5	2/5	0	−1/5	
P_7	1	1	1		0			①	−1	1	−1	1
P_2	0	−1	3/5		1			−3/5	−1/5	0	3/5	
			1					−1				
P_1	0	2/5	3/5					0	3/5	−1/5	0	
P_5	0	1/5	1					1	−1	1	−1	
P_2	0	0	6/5					0	−4/5	3/5	0	
			0					0	1	1	1	

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geqslant 3, \\ 4x_1 + 3x_2 \geqslant 6, \\ x_1 + 2x_2 \geqslant 2, \end{cases}$$

$$x_1、x_2 \geqslant 0.$$

引进松弛变量 x_3, x_4, x_5，人工变量 x_6, x_7, x_8，得

$$\min z = x_1 + x_2,$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 + x_6 = 3, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_4 + x_7 = 6, \\ x_1 + 2x_2 - x_5 + x_8 = 2, \end{cases}$$

$$x_i \geqslant 0,\ i = 1,2,3,\cdots,8.$$

第一阶段解目标函数为

$$\min Z_1 = x_6 + x_7 + x_8$$

的问题如下。

从表 6-7-1 得一允许解：$x_1 = 3/5$，$x_2 = 6/5$，$x_3 = x_4 = 0$，$x_5 = 1$。即满足

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqslant 0$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 3, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_4 = 6, \\ x_1 + 2x_2 - x_5 = 2, \end{cases}$$

表 6-7-2 是以$\left(\frac{3}{5}, \frac{6}{5}, 0, 0, 1\right)$为起始点，开始第二阶段。故得最优解

$$x_1 = 3/5,\ x_2 = 6/5,\ x_3 = x_4 = 0,\ x_5 = 1.$$

$$\min z = 12/5.$$

第一阶段用改善单纯形法的计算见表 6-7-3。

定理： 问题(I)有解的必要条件是问题(II)的解为

$$x_{n+1} = x_{n+2} = \cdots = x_{n+m} = 0.$$

证： 如若问题(II)的解不满足 $x_{n+1} = x_{n+2} = \cdots = x_{n+m} = 0$ 的条件，即 $z_1 > 0$。不妨令其中的 $x_{n+1} = \beta_{n+1}, x_{n+2} = \beta_{n+2}, \cdots, x_{n+m} = \beta_{n+m}$。问题(I)的解为 $\mathbf{X} = (\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n)^T$，作

$$\overline{\mathbf{X}} = (\underbrace{\alpha_1\ \alpha_2 \cdots \alpha_n}_{n\text{个}}\quad \underbrace{0 \cdots 0}_{m\text{个}})^T = \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

$$(\mathbf{A} \vdots \mathbf{E})\begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \mathbf{AX} = \mathbf{b}.$$

即 $\overline{\mathbf{X}}$ 是(II)的解。但对应于 $(\mathbf{X} \vdots \mathbf{0})^T$ (II) 的目标函数为

$$z_1 = 0 < \beta_{n+1} + \beta_{n+2} + \cdots + \beta_{n+m},$$

这跟(II)的最优解 $z_1 > 0$ 的假定矛盾。 ∎

这就是为什么把这里引进的变量称为人工变量的原因，它只

是找到允许解域的一个顶点的手段，最终必须退出去。前面的例题就是利用这个原理。

§8 退化情况及其它

前面讨论的单纯形法的前提，一是非退化，一是右端常数项 b 的元素都是正数。现在补充讨论如下。

1. 退化情形：

设基变量的数目为 m，而非基变量为 n 个。允许解域的超凸多面体的顶点坐标一般说来有 m 个非零元素，n 个零元素。

设 $P_{b_1},P_{b_2},\cdots,P_{b_m}$ 为 m 个基，一般存在 m 个正数 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 使得

$$P_0=a_1P_{b_1}+a_2P_{b_2}+\cdots+a_mP_{b_m}.$$

若 P_0 可用少于 m 个的基线性结合表示，则称为是退化，亦即超凸多面体的顶点坐标的零元素数目多于 n 个。

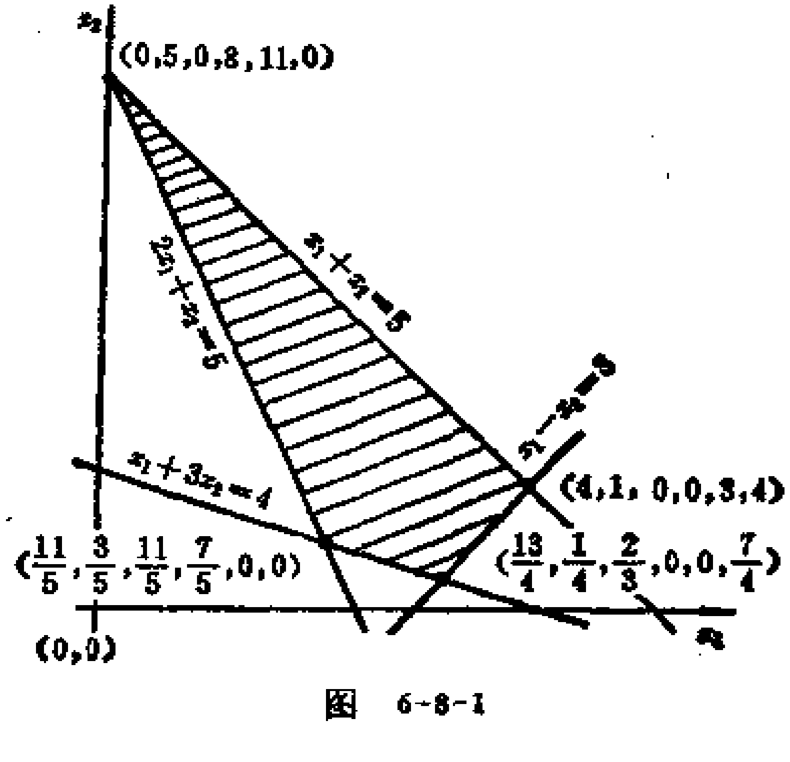


图 6-8-1

例如

$$
\max z = x_1 + x_2,
$$

$$
\begin{cases}
x_1 + x_2 \leqslant 5, \\
x_1 - x_2 \leqslant 3, \\
x_1 + 3x_2 \geqslant 4, \\
2x_1 + x_2 \geqslant 5,
\end{cases}
$$

$$
x_1, x_2 \geqslant 0.
$$

引进松弛变量 x_3, x_4, x_5, x_6 得

$$
\max z = x_1 + x_2,
$$

$$
\begin{cases}
x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\
x_1 - x_2 + x_4 = 3, \\
x_1 + 3x_2 - x_5 = 4, \\
2x_1 + x_2 - x_6 = 5,
\end{cases}
$$

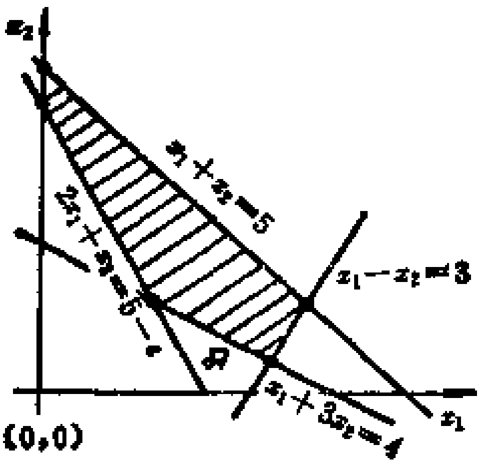


图 6-8-2

$$
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geqslant 0.
$$

由图 6-8-1 可见，四个顶点中有三个顶点其坐标有两个零元素，但(0,5,0,8,11,0)有 3 个零。它可以看作是图 6-8-2 中

$$2x_1 + x_2 = 5 - \varepsilon$$

当 $\varepsilon \to 0$ 的极限。

2. 退化情形的循环不已举例

有一个例子说明退化的问题用单纯形法求解可能失败（列表 6-8-1）。

$$\min z = -\frac{3}{4}x_1 + 20x_2 - \frac{1}{2}x_3 + 6x_4,$$

$$\begin{cases} \frac{1}{4}x_1 - 8x_2 - x_3 + 9x_4 \leqslant 0, \\ \frac{1}{2}x_1 - 12x_2 - \frac{1}{2}x_3 + 3x_4 \leqslant 0, \\ \qquad\qquad x_3 \leqslant 1, \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0.$$

引进松弛变量 x_5, x_6, x_7，得

$$\min z = -\frac{3}{4}x_1 + 20x_2 - \frac{1}{2}x_3 + 6x_4,$$

$$\begin{cases} \frac{1}{4}x_1 - 8x_2 - x_3 + 9x_4 + x_5 = 0, \\ \frac{1}{2}x_1 - 12x_2 - \frac{1}{2}x_3 + 3x_4 + x_6 = 0, \\ \qquad\qquad x_3 + x_7 = 1, \end{cases}$$

$$x_i \geqslant 0, \ i = 1,2,3,4,5,6,7.$$

显然，目标函数自始至终没有改善。实际上在整个过程中都未离开 $x_1 = x_2 = \cdots = x_6 = 0$，$x_7 = 1$ 点。

3. 小扰动法

为了要从退化情况中摆脱出来，使约束条件

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{i\,n+m}x_{n+m} = b_i,$$

表 6-8-1

基底 P_B	C_B	P_j / C / P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	β
		C	$-3/4$	20	$-1/2$	6	0	0	0	
P_5	0	0	(1/4)	-8	-1	9	1	0	0	0
P_6	0	0	1/2	-12	$-1/2$	3	0	1	0	0
P_7	0	1	0	0	1	0	0	0	1	
		0	$(-3/4)$	20	$-1/2$	6	0	0	0	
P_1	$-3/4$	0	1	-32	-4	36	4	0	0	
P_6	0	0	0	(4)	3/2	-15	-2	1	0	0
P_7	0	1	0	0	1	0	0	0	1	
		0	0	(-4)	$-7/2$	33	3	0	0	
P_1	$-3/4$	0	1	0	(8)	-84	-12	8	0	0
P_2	20	0	0	1	3/8	$-15/4$	$-1/2$	1/4	0	0
P_7	0	1	0	0	1	0	0	0	1	
		0	0	0	(-2)	18	1	1	0	
P_3	$-1/2$	0	1/8	0	1	$-21/2$	$-3/2$	1	0	
P_2	20	0	$-3/64$	1	0	(3/16)	1/16	$-1/8$	0	0
P_7	0	1	$-1/8$	0	0	21/2	3/2	-1	1	
		0	1/4	0	0	(-3)	-2	3	0	
P_3	$-1/2$	0	$-5/2$	56	1	0	(2)	-6	0	0
P_4	6	0	$-1/4$	16/3	0	1	1/3	$-2/3$	0	0
P_7	0	1	5/2	-56	0	0	2	6	1	
		0	$-1/2$	16	0	0	(-1)	1	0	
P_5	0	0	$-5/4$	28	1/2	0	1	-3	0	
P_4	6	0	1/6	-4	$-1/6$	1	0	(1/3)	0	0
P_7	0	1	0	0	1	0	0	6	1	
		0	$-7/4$	44	1/2	0	0	(-2)	0	

表 6-8-1 续

基底 P_l	C_B	P_0 \ C \ P_j	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	β
			$-3/4$	20	$-1/2$	6	0	0	0	
P_5	0	0	1/4	-8	-1	9	1	0	0	
P_6	0	0	1/2	-12	$-1/2$	3	0	1	0	
P_7	0	1	0	0	1	0	0	0	1	
		0	$(-3/4)$	20	$-1/2$	6	0	0	0	

代以

$$\begin{aligned} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in+m}x_{n+m} \\ = b_i + a_{i1}\varepsilon + a_{i2}\varepsilon^2 + \cdots + a_{in+m}\varepsilon^{n+m}, \\ i = 1, 2, \cdots, m. \end{aligned}$$

求问题的解，然后令 $\varepsilon \to 0$.

以前面循环不已的例子，利用小扰动法求解如下（列表 6-8-2）。

请读者注意，从本例可以看出，比如

$$\beta = \min\{\varepsilon - 32\varepsilon^2 + \cdots, \ \varepsilon - 24\varepsilon^2 + \cdots\}$$

其中 ε^0 项系数为零，ε^1 项系为 1，故 $\beta = \varepsilon - 32\varepsilon^2 + \cdots$。而 ε^0，$\varepsilon^1, \varepsilon^2, \cdots$ 项系数恰好由

$$P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_1 = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} -8 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix}$$

的各分量分别与进入基 P_1 的对应分量的比值所确定。故当由于出现退化不能利用

表 6-8-2

基底 P_B	C_B	P_0 \ C \ P_j	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
			$-3/4$	20	$-1/2$	6	0	0	0
P_5	0	$\frac{1}{4}\varepsilon-8\varepsilon^2-\cdots$	(1/4)	-8	-1	9	1	0	0
P_6	0	$\frac{1}{2}\varepsilon-12\varepsilon^2\cdots$	1/2	-12	$-1/2$	3	0	1	0
P_7	0	$1+\varepsilon^2$	0	0	1	0	0	0	1
		0	$-3/4$	20	$-1/2$	6	0	0	0
P_1	$-3/4$	$\varepsilon-32\varepsilon^2-\cdots$	1	-32	-4	36	4	0	0
P_6	0	$4\varepsilon^2+\cdots$	0	(4)	3/2	-15	-2	1	0
P_7	0	$1+\varepsilon^3$	0	0	1	0	0	0	1
		$-3/4\varepsilon+\cdots$	0	(-4)	$-7/2$	33	3	0	0
P_1	$-3/4$	$\varepsilon+8\varepsilon^2-\cdots$	1	0	8	-84	-12	8	0
P_2	20	$\varepsilon^2+\cdots$	0	1	(3/8)	$-15/4$	$-1/2$	1/4	0
P_7	0	$1+\varepsilon^3$	0	0	1	0	0	0	1
		$-3/4\varepsilon+\cdots$	0	0	(-2)	18	1	1	0
P_1	$-3/4$	$\varepsilon-$	1	$-64/3$	0	-4	$-4/3$	8/3	0
P_3	$-1/2$	$8/3\varepsilon^2+\cdots$	0	8/3	1	-10	$-4/3$	2/3	0
P_7	0	$1-\frac{8}{3}\varepsilon^2+\cdots$	0	$-8/3$	0	(10)	4/3	$-2/3$	1
		$-\frac{3}{4}\varepsilon+\cdots$	0	$5^1/3$	0	(-2)	$-5/3$	7/3	0
P_1	$-3/4$	$4/10\cdots$	1	$-112/5$	0	0	$-4/5$	12/5	4/10
P_3	$-1/2$	$1+\cdots$	0	0	1	0	0	0	1
P_4	6	$\frac{1}{10}-\cdots$	0	$-4/15$	0	1	(2/15)	$-1/15$	1/10
		$\frac{2}{10}+\cdots$	0	$4\frac{4}{5}$	0	0	$(-7/5)$	$2^1/5$	2/10

续表 6-8-2

基底 P_B	C_B	P_j / C / P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
			$-3/4$	20	$-1/2$	6	0	0	0
P_1	$-3/4$	$1+\cdots$	1	-24	0	6	0	2	1
P_3	$-1/2$	$1+\cdots$	0	0	1	0	0	0	1
P_5	0	$\frac{3}{4}+\cdots$	0	-2	0	15/2	1	$-1/2$	3/4
		$-\frac{5}{4}+\cdots$	0	2	0	21/2	0	3/2	5/4

$$\min_r \left\{ \frac{b_r}{a_{rk}} \middle| a_{rk} > 0 \right\}$$

唯一地确定主元素时，可依次令 $l=1,2,\cdots$ 求

$$\min_r \left\{ \frac{a_{rl}}{a_{rk}} \right\}$$

直到唯一地确定

$$\frac{a_{hl}}{a_{hk}} = \min_r \left\{ \frac{a_{rl}}{a_{rk}} \right\}$$

为止，此时取 a_{hk} 为主元素。从而确定退出的基。

除了上面所说的方法，再介绍一种避免循环的 Bland 法则。

Bland 法则：如果有几个基都可进入，选下标最小的进入；如果有几个基都可退出，选下标最小的退出。

证明从略。

Bland 法则虽然简明，但实际计算时迭代次数却不一定比小扰动法少。因此在遇到退化情况时可先考虑选择使 $\beta>0$ 的基进入。前例利用此策略的改善单纯形表 6-8-3 如下：

表 6-8-3

B	C_B	C_BB^{-1}	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	β
				$-3/4$	20	$-1/2$	6	0	0	0	
P_5	0	0	0	1/4	-8	-1	9	1	0	0	
P_6	0	0	0	1/2	-12	$-1/2$	3	0	1	0	
P_7	0	0	1	0	0	①	0	0	0	1	1
			0			$-1/2$					
P_5	0	0	1	1/4		0		1	0	1	
P_6	0	0	1/2	(1/2)		0		0	1	1/2	1
P_3	$-1/2$	$-1/2$	1	0		1		0	0	1	
			$-1/2$	$-3/4$							
P_5	0	0	3/4	0				1	$-1/2$	3/4	
P_1	$-3/4$	$-3/2$	1	1				0	2	1	
P_3	$-1/2$	$-5/4$	1	0				0	0	1	
			$-5/4$	0	2	0	21/2	0	3/2	5/4	

§9 对偶原理

1. 对偶概念

问题 (P):

$$\max\ z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots c_nx_n,$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leqslant b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leqslant b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_m \leqslant b_m, \end{cases}$$

$$x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0.$$

问题 (D):

$$\min\ w = b_1y_1 + b_2y_2 + \cdots + b_my_m,$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots + a_{m1}y_m \geqslant c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{m2}y_m \geqslant c_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \cdots + a_{mn}y_m \geqslant c_m, \end{cases}$$

$$y_1, y_2, \cdots, y_m \geqslant 0.$$

或用矩阵形式表达如下。

问题（P）：	问题(D)：
$\max\ z = \mathbf{CX}$,	$\min\ w = \mathbf{Yb}$.
$\mathbf{AX} \leqslant \mathbf{b}$,	$\mathbf{YA} \geqslant \mathbf{C}$,
$\mathbf{X} \geqslant \mathbf{0}$.	$\mathbf{Y} \geqslant \mathbf{0}$.

其中

$$\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n},\ \mathbf{b} = (b_i)_{m\times 1},\ \mathbf{C} = (c_j)_{m\times 1},$$
$$\mathbf{X} = (x_j)_{n\times 1},\quad \mathbf{Y} = (y_i)_{1\times m}.$$

2. 对偶问题的经济意义

有 n 种不同的食物，第 j 种食物含营养素 i 的百分比为 a_{ij}，其中 $i = 1,2,\cdots,m$。假如配一食谱要求第 i 种营养的量不低于 b_i，而第 j 种食物的单位价格为 c_j。从消费者角度希望费用最低，故有

$$\min\ z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n,$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \geqslant b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \geqslant b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \geqslant b_m, \end{cases} \qquad (D)$$

$$x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0.$$

其中 x_j 为第 j 种食品的需要量。

从营养素制造厂角度来分析，第 i 种营养素的单位价格设为 y_i，它必须服从下列的约束条件，

$$
\begin{cases}
a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots + a_{m1}y_m \leqslant c_1, \\
a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{m2}y_m \leqslant c_2, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \cdots + a_{mn}y_m \leqslant c_n,
\end{cases} \qquad (P)
$$

$$
y_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \cdots, m.
$$

否则价格将是不合理的，顾客不愿意购买而用代用品。故合理的价格应是在约束条件（P）下使目标函数

$$
z = b_1y_1 + b_2y_2 + \cdots + b_my_m
$$

达到最大。这两个问题恰好是对偶问题。

定义： 问题(D)称为是问题(P)的对偶问题。

问题(P)和问题(D)用下面的图表示。

$$
\begin{array}{c|cccc|c}
 & x_1 & x_2 & \cdots\cdots & x_n & \\
\hline
y_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} & \leqslant b_1 \\
y_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} & \leqslant b_2 \\
\vdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots & \vdots \\
y_m & a_{m1} & a_{m2} & \cdots\cdots & a_{mn} & \leqslant b_m \\
\hline
 & \geqslant & \geqslant & \cdots\cdots & \geqslant & \\
 & c_1 & c_2 & \cdots\cdots & c_n & = \boxed{\max \vdots \min}
\end{array}
$$

例： 问题（P）

$$
\max \ z = x_1 - x_2,
$$

$$
\begin{cases}
-2x_1 + x_2 \leqslant 2, \\
x_1 - 2x_2 \leqslant 1, \\
x_1 + x_2 \leqslant 4,
\end{cases}
$$

$$
x_1, x_2 \geqslant 0.
$$

问题（D）

$$
\min \ w = 2y_1 + y_2 + 4y_3,
$$

$$
-2y_1 + y_2 + y_3 \geqslant 1,
$$

$$
y_1 - 2y_2 + y_3 \geqslant -1,
$$

$$
y_1, y_2, y_3, y_4 \geqslant 0.
$$

3. 对偶问题性质

求 $w = \mathbf{Y}\mathbf{b}$ 的最小值可以转为求 $w = -\mathbf{Y}\mathbf{b}$ 的最大值，故问题（D）改为

$$\begin{aligned}&\max\ w = \mathbf{Y}(-\mathbf{b}),\\&\mathbf{Y}(-\mathbf{A}) \leqslant (-\mathbf{C}),\\&\mathbf{Y} \geqslant \mathbf{0},\end{aligned}$$

其对偶问题为

$$\begin{aligned}&\min\ z = (-\mathbf{C})\mathbf{X},\\&(-\mathbf{A})\mathbf{X} \geqslant (-\mathbf{b}),\\&\mathbf{X} \geqslant \mathbf{0}.\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}&\max\ z = \mathbf{C}\mathbf{X},\\&\mathbf{A}\mathbf{X} \leqslant \mathbf{b},\\&\mathbf{X} \geqslant \mathbf{0}.\end{aligned}$$

即问题（D）是问题（P）的对偶问题．问题（D）的对偶问题是问题（P）；即问题（P）和问题（D）互为对偶问题。

定理： 问题

$$\begin{aligned}&\max\ z = \mathbf{C}\mathbf{X},\\&\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{b},\\&\mathbf{X} \geqslant \mathbf{0},\end{aligned} \qquad (P_1)$$

的对偶问题是

$$\begin{aligned}&\min\ w = \mathbf{Y}\mathbf{b},\\&\mathbf{Y}\mathbf{A} \geqslant \mathbf{C}.\end{aligned} \qquad (D_1)$$

证： 问题(P_1)的约束条件为 $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{b}$，等价于

$$\begin{aligned}&\mathbf{A}\mathbf{X} \leqslant \mathbf{b},\\&\mathbf{A}\mathbf{X} \geqslant \mathbf{b},\end{aligned}$$

或

$$\mathbf{AX} \leqslant \mathbf{b},$$
$$-\mathbf{AX} \leqslant -\mathbf{b},$$

即

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ -\mathbf{A} \end{pmatrix} \mathbf{X} \leqslant \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ -\mathbf{b} \end{pmatrix}.$$

但问题

$$\max\ z = \mathbf{CX},$$
$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ -\mathbf{A} \end{pmatrix} \mathbf{X} \leqslant \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ -\mathbf{b} \end{pmatrix}. \qquad (P_1)$$
$$\mathbf{X} \geqslant \mathbf{0}.$$

的对偶问题为

$$\min\ w = (\mathbf{Y}_1 \vdots \mathbf{Y}_2) \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ -\mathbf{b} \end{pmatrix},$$

$$(D)$$

$$(\mathbf{Y}_1 \vdots \mathbf{Y}_2) \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ -\mathbf{A} \end{pmatrix} \geqslant \mathbf{C},$$
$$\mathbf{Y}_1 \geqslant \mathbf{0},\ \mathbf{Y}_2 \geqslant \mathbf{0}.$$

但 $(\mathbf{Y}_1 \vdots \mathbf{Y}_2) \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ -\mathbf{A} \end{pmatrix} \geqslant \mathbf{C}$, 即 $(\mathbf{Y}_1 - \mathbf{Y}_2)\mathbf{A} \geqslant \mathbf{C}$.

令 $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_1 - \mathbf{Y}_2$,

$$(\mathbf{Y}_1\quad \mathbf{Y}_2) \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ -\mathbf{b} \end{pmatrix} = (\mathbf{Y}_1 - \mathbf{Y}_2)\mathbf{b} = \mathbf{Yb}.$$

故问题(P_1)的对偶问题 (D)为

$$\min\ w = \mathbf{Yb},$$
$$\mathbf{YA} \geqslant \mathbf{C}. \qquad \blacksquare$$

4. 对偶定理

定理: 设 $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ 分别是问题 (P), (D) 的允许解, 则 $\mathbf{CX}$

$\leqslant$ **Yb**. 特别当 **CX** = **Yb** 时，**X**,**Y** 分别是问题(P)，(D)的最优解。

证：由于

$$\mathbf{AX} \leqslant \mathbf{b},\ \mathbf{YA} \geqslant \mathbf{C},$$

即假定

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i,\ i = 1,2,\cdots,m, \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geqslant c_j,\ j = 1,2,\cdots,n. \tag{2}$$

则

$$\mathbf{CX} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leqslant \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i\right) x_j$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right) y_i \leqslant \sum_{i=1}^{m} b_i y_i = \mathbf{Yb}.$$

$$\therefore\ \mathbf{CX} \leqslant \mathbf{Yb}.$$

若当 **CX** = **Yb** 成立，而 **X** 不是(P)的最优解，则必存在 $\mathbf{X}_1$，使 $\mathbf{CX}_1 > \mathbf{CX} = \mathbf{Yb}$. 这跟 $\mathbf{CX}_1 \leqslant \mathbf{Yb}$ 的结果相矛盾。

同样可证 **Y** 是(D)的最优解。 ■

定理：若 **X**,**Y** 分别是问题 (P),(D) 的最优解，则

$$\mathbf{CX} = \mathbf{Yb}.$$

证：**X** 是(P)的最优解，故

$$\max\ z = \mathbf{CX},$$
$$\mathbf{AX} \leqslant \mathbf{b},$$
$$\mathbf{X} \geqslant \mathbf{0}.$$

同理 **Y** 满足

$$\min\ w = \mathbf{Yb},$$
$$\mathbf{YA} \geqslant \mathbf{C},$$
$$\mathbf{Y} \geqslant \mathbf{0}.$$

引进松弛变量 $\mathbf{X}_s$，问题(P)为

$$\max\ z = (\mathbf{C}\vdots\mathbf{0})\begin{pmatrix}\mathbf{X}\\ \mathbf{X}_s\end{pmatrix},$$

$$(\mathbf{A}\vdots\mathbf{E})\begin{pmatrix}\mathbf{X}\\ \mathbf{X}_s\end{pmatrix} = \mathbf{b},$$

$$\begin{pmatrix}\mathbf{X}\\ \mathbf{X}_s\end{pmatrix} \geqslant \mathbf{0}.$$

$$(\mathbf{A}\vdots\mathbf{E}) = (\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\cdots\mathbf{P}_{n+m}).$$

设 $\mathbf{B}$ 为由问题(P)的最优解的基所对应的列构成的矩阵。

$$\mathbf{X}_{opt} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_0,\ z_j = \mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j,\ j = 1,2,\cdots,n+m.$$

令 $\mathbf{Y}_B = \mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}$，可以证明 $\mathbf{Y}_B$ 即为问题(D)的最优解。

$$\mathbf{Y}_B(\mathbf{A}\vdots\mathbf{E}) = \mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{A}\vdots\mathbf{E}) = (\mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\vdots\mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}).$$

由于 $\mathbf{X}_{opt}$ 是（P）的最优解，故 $c_j - z_j \leqslant 0$，$j = 1,\ 2,\cdots,n + m$，即

$$\mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} \geqslant \mathbf{C},\ \mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1} \geqslant \mathbf{0}.$$

$$\therefore\quad (\mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1})\mathbf{A} = \mathbf{Y}_B\mathbf{A} \geqslant \mathbf{C},\quad \mathbf{Y}_B \geqslant \mathbf{0}.$$

故 $\mathbf{Y}_B$ 满足问题(D)的约束条件，即是问题(D)的允许解。此时

$$\mathbf{Y}_B\mathbf{b} = \mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{C}_B(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}) = \mathbf{C}_B\mathbf{X}_{opt}.$$

依据本节前一定理，可知 $\mathbf{Y}_B$ 是问题(D)的最优解。 ∎

5. 影子价格

对偶原理不仅证明了问题(P)，(D)的解满足等式

$$\mathbf{Yb} = \mathbf{CX}.$$

实际上还给出若(P)的解 $\mathbf{X}_{opt} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_0$，则($D$)的解为

$$\mathbf{Y}_{opt} = \mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}. \qquad (6\text{-}9\text{-}1)$$

(5-10-1)可以用来求对偶问题的解。

$\mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}$ 称为食品价格 C 的影子价格。以本节开始介绍对偶问

题时提到的两个对偶的经济问题为例，问题（P）是要求费用最低，$\mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}$ 则实际上是各种营养素的价格，它受食品价格的制约。

影子价格在运筹学中有其重要的意义。问题（P）的最优解的目标函数

$$z = \mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_0.$$

令 $\quad \mathbf{D} = \mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1} = (d_1d_2\cdots d_m),\ \mathbf{P}_0 = (b_1b_2\cdots b_m)^T,$

则 $$z = d_1b_1 + d_2b_2 + \cdots + d_mb_m.$$

若把 z 看作是右端常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_m$ 的函数，

$$d_i = \frac{\partial z}{\partial b_i},\ i = 1,2,\cdots,m.$$

则影子价格

$$\mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1} = \text{grad}\, z = \left(\frac{\partial z}{\partial b_1}\frac{\partial z}{\partial b_2}\cdots\cdots\frac{\partial z}{\partial b_m}\right).$$

从影子价格可以看出 $b_1, b_2, \cdots, b_m$ 的变化对目标函数的影响如何。

6. 例

$$\min\ w = y_1 + 2y_2,$$
$$\begin{cases} 3y_1 + 4y_2 \geqslant 6, \\ y_1 + 3y_2 \geqslant 3, \\ 2y_1 + y_2 \geqslant 2, \end{cases}$$
$$y_1 \geqslant 0,\ y_2 \geqslant 0.$$

先用两阶段法求解，然后用对偶原理求解。

引进松弛变量 y_3, y_4, y_5 及人工变量 y_6, y_7, y_8.

$$\min\ w_1 = y_6 + y_7 + y_8,$$
$$\begin{cases} 3y_1 + 4y_2 - y_3 + y_6 = 6, \\ y_1 + 3y_2 - y_4 + y_7 = 3, \\ 2y_1 + y_2 - y_5 + y_8 = 2, \end{cases}$$
$$y_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \cdots 8.$$

表 6-9-1

基底 P_B	C_B	P_j \ C / P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	β
			0	0	0	0	0	1	1	1	
P_6	1	6	3	4	−1	0	0	1	0	0	3/2
P_7	1	3	1	(3)	0	−1	0	0	1	0	(1)
P_8	1	2	2	1	0	0	−1	0	0	1	2
		11	−6	−8	1	1	1	0	0	0	
P_6	1	2	5/3	0	−1	4/3	0	1	−4/3	0	6/5
P_2	0	1	1/3	1	0	−1/3	0	0	1/3	0	3
P_8	1	1	(5/3)	0	0	1/3	−1	0	−1/3	1	(3/5)
		3	(−10/3)	0	1	−5/3	1	0	8/3	0	
P_6	1	1	0	0	−1	1	(1)	1	−1	−1	(1)
P_2	0	4/5	0	1	0	−2/5	1/5	0	2/5	−1/5	4
P_1	0	3/5	1	0	0	1/5	−3/5	0	−1/5	3/5	
		1	0	0	1	−1	(−1)	0	2	2	
P_5	0	1	0	0	−1	1	1	1	−1	−1	
P_2	0	3/5	0	1	+1/5	−3/5	0	−1/5	3/5	0	
P_1	0	6/5	1	0	−3/5	4/5	0	3/5	−4/5	0	
		0	0	0	0	0	0	1	1	1	

基底 P_B	C_B	P_j \ C / P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	β
			1	2	0	0	0	
P_5	0	1	0	0	−1	1	1	
P_2	2	3/5	0	1	1/5	−3/5	0	
P_1	1	6/5	1	0	−3/5	4/5	0	
		12/5	0	0	1/5	2/5	0	

表 6-9-2

基底 P_B	C_B	P_j \ C / P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	β
			6	3	2	0	0	
P_4	0	1	(3)	1	2	1	0	1/3
P_5	0	2	4	3	1	0	1	1/2
		0	(6)	3	1	0	0	
P_1	6	1/3	1	1/3	2/3	1/3	0	
P_5	0	2/3	0	(5/3)	−5/3	−4/3	1	
		2	0	(1)	−2	−2	0	
P_1	6	1/5	1	0	1	3/5	−1/5	
P_2	3	2/5	0	1	−1	−4/5	3/5	
		12/5	0	0	−1	(−6/5)	(−3/5)	

故最优解为 $y_1=6/5$，$y_2=3/5$，$y_3=y_4=0$，$y_5=1$，其单纯形表 6-9-1 见上页。下面求其对偶问题的解。

$$\max\ z=6x_1+3x_2+2x_3,$$

$$\begin{cases}3x_1+x_2+2x_3\leqslant 1,\\4x_1+3x_2+x_3\leqslant 2,\end{cases}$$

$$x_1,x_2,x_3\geqslant 0.$$

引进松弛变量 x_4,x_5。

对偶定理证明了问题(D)的解为

$$\mathbf{Y}_B=\mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}.$$

现在 $\mathbf{C}_B=(6,3)$，$\mathbf{B}^{-1}=\begin{pmatrix}3/5 & -1/5\\ -4/5 & 3/5\end{pmatrix}$，

$$(y_1 \quad y_2)=(6 \quad 3)\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}=\left(\frac{6}{5} \quad \frac{3}{5}\right).$$

对偶问题的单纯形表 6-9-2。

表 6-9-2 的最后一行实际上是

$$\mathbf{C}-\mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{A}\vdots\mathbf{E})=\mathbf{C}-(\mathbf{C}_B^{-1}\mathbf{A}\vdots\mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}).$$

故这一行的 $\mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}$ 项给出对偶问题(D)的解。本例显而易见从问题(P)获得问题(D)的解要简单得多了。

§10 对偶单纯形法

对于问题

$$\begin{aligned} \max\ z=\mathbf{CX}, \\ \mathbf{AX}\leqslant \mathbf{b}, \\ \mathbf{X}\geqslant 0. \end{aligned} \tag{6-10-1}$$

若 $\mathbf{b}$ 出现负的元素时，单纯形法便出现了麻烦。正如§10 中所讨论的那样要借助于二阶段法，这样计算量和存储都得随之增加.这一节讨论的一种对偶单纯形法，它适用于(6-10-1)中 $\mathbf{b}$ 有负元素的情况，但 $c_i-z_i\leqslant 0$, $i=1, 2, \cdots, m$。设已知单纯形表 6-10-1。

表 6-10-1

$\mathbf{C}_B$	$\mathbf{P}_0$	$\mathbf{P}_1$	$\mathbf{P}_2 \cdots\cdots$	$\mathbf{P}_k$	$\cdots\cdots \mathbf{P}_n$
z_1	b_1	a_{11}	$a_{12}\cdots\cdots$	a_{1k}	$\cdots\cdots a_{1n}$
z_2	b_2	a_{21}	$a_{22}\cdots\cdots$	a_{2k}	$\cdots\cdots a_{2n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
z_r	b_r	a_{r1}	$a_{r2}\cdots\cdots$	(a_{rk})	$\cdots\cdots a_{rn}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
z_m	b_m	a_{m1}	$a_{m2}\cdots\cdots$	a_{mk}	$\cdots\cdots a_{mn}$
	$z^{(0)}$	c_1-z_1	$c_2-z_2\cdots\cdots$	c_k-z_k	$\cdots\cdots c_n-z_n$

其中 $b_r<0, a_{rk}<0, c_i-z_i\leqslant 0$, $i=1,2,\cdots,n$。今以 a_{rk} 为主元素作行消元得表 6-10-2。

表 6-10-2

C_B	P_0	P_1	$P_2 \cdots\cdots P_k \cdots\cdots P_n$
$\bar{c}_1$	$b_1-\frac{b_r}{a_{rk}}a_{1k}$	$a_{11}-\frac{a_{r1}}{a_{rk}}a_{1k}$	$a_{12}-\frac{a_{r2}}{a_{rk}}a_{1k}$ … 0 … $a_{1n}-\frac{a_{rn}}{a_{rk}}a_{1k}$
$\bar{c}_2$	$b_2-\frac{b_r}{a_{rk}}a_{2k}$	$a_{21}-\frac{a_{r1}}{a_{rk}}a_{2k}$	$a_{22}-\frac{a_{r2}}{a_{rk}}a_{2k}$ … 0 … $a_{2n}-\frac{a_{rn}}{a_{rk}}a_{2k}$
⋮	⋮	⋮	⋮ ⋮ ⋮
c_k	$\frac{b_r}{a_{rk}}$	$\frac{a_{r1}}{a_{rk}}$	$\frac{a_{r2}}{a_{rk}}$ …… 1 …… $\frac{a_{rn}}{a_{rk}}$
⋮	⋮	⋮	⋮ ⋮ ⋮
$\bar{c}_m$	$b_m-\frac{b_r}{a_{rk}}a_{mk}$	$a_{m1}-\frac{a_{r1}}{a_{rk}}a_{mk}$	$a_{m2}-\frac{a_{r2}}{a_{rk}}a_{mk}$ … 0 … $a_{mn}-\frac{a_{rn}}{a_{rk}}a_{mk}$
	z	$c_1-\bar{z}_1$	$c_2-\bar{z}_2$ …… 0 …… $c_n-\bar{z}_n$

其中

$$
\begin{aligned}
\bar{z}_i &= \bar{c}_1\left(a_{1i}-\frac{a_{ri}}{a_{rk}}a_{1k}\right)+\bar{c}_2\left(a_{2i}-\frac{a_{ri}}{a_{rk}}a_{2k}\right)+\cdots \\
&\quad +c_k\frac{a_{ri}}{a_{rk}}+\cdots+\bar{c}_m\left(a_{mi}-\frac{a_{ri}}{a_{rk}}a_{mk}\right) \\
&= (\bar{c}_1a_{1i}+\bar{c}_2a_{2i}+\cdots+\bar{c}_ma_{mi})-\bar{c}_ra_{ri}+c_k\frac{a_{ri}}{a_{rk}} \\
&\quad -\frac{a_{ri}}{a_{rk}}(\bar{c}_1a_{1k}+\bar{c}_2a_{2k}+\cdots+\bar{c}_ma_{mk}-\bar{c}_ra_{rk}) \\
&= z_i-\bar{c}_ra_{ri}+c_k\frac{a_{ri}}{a_{rk}}-\frac{a_{ri}}{a_{rk}}(z_k-\bar{c}_ra_{rk}) \\
&= z_i+\frac{a_{ri}}{a_{rk}}(c_k-z_k).
\end{aligned}
$$

$$\therefore \qquad c_i - \bar{z}_i = c_i - z_i - \frac{a_{ri}}{a_{rk}}(c_k - z_k), \qquad (6\text{-}10\text{-}2)$$

$$i = 1, 2, \cdots, n.$$

式(6-10-2)说明它相当于矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & (a_{rk}) & \cdots & a_{rn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mk} & \cdots & a_{mn} \\ c_1 - z_1 & c_2 - z_2 & \cdots & c_k - z_k & \cdots & c_n - z_n \end{pmatrix}$$

以 a_{rk} 为主元素进行列消元所得的结果。

显然$\frac{b_r}{a_{rk}} > 0$。如若要保持 $c_i - z_i \leqslant 0, i = 1, 2, \cdots, n$，可选择 k 使满足

$$\frac{c_k - z_k}{a_{rk}} = \min_i \left\{ \frac{c_i - z_i}{a_{ri}} \middle| a_{ri} < 0 \right\}. \qquad (6\text{-}10\text{-}3)$$

分两种情况考虑如下

(a) $a_{ri} > 0$，由于 $(c_k - z_k) < 0, a_{rk} < 0$，

$$\therefore \qquad c_i - \bar{z}_i = (c_i - z_i) - \frac{a_{ri}}{a_{rk}}(c_k - z_k) \leqslant 0.$$

(b) $a_{ri} < 0$，

$$\because \qquad \frac{c_k - z_k}{a_{rk}} \leqslant \frac{c_i - z_i}{a_{ri}},$$

$$c_i - z_i \leqslant \frac{a_{ri}}{a_{rk}}(c_k - z_k),$$

$$\therefore \qquad c_i - \bar{z}_i = (c_i - z_i) - \frac{a_{ri}}{a_{rk}}(c_k - z_k) \leqslant 0.$$

对 min 问题应有 $c_i - z_i \geqslant 0$，并始终保持这一条件，因而所

取主元 a_{rk} 应满足

$$\frac{c_k - z_k}{a_{rk}} = \max_j \left\{ \frac{c_j - z_j}{a_{rj}} \middle| a_{rj} < 0 \right\} \qquad (6\text{-}10\text{-}4)$$

由式(6-10-3)和式(6-10-4)分别确定进入的基和退出的基。

对偶单纯形法举例说明如下。

$$\min z = 3x_1 + x_2,$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geqslant 1, \\ 2x_1 + 3x_2 \geqslant 2, \end{cases}$$
$$x_1、x_2 \geqslant 0.$$

$$\max w = -3x_1 - x_2,$$
$$\begin{cases} -x_1 - x_2 \leqslant -1, \\ -2x_1 - 3x_2 \leqslant -2, \end{cases}$$
$$x_1, \ x_2 \geqslant 0.$$

引进松弛变量 x_3, x_4。

$$\max w = -3x_1 - x_2,$$
$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 = -1, \\ -2x_1 - 3x_2 + x_4 = -2, \end{cases}$$
$$x_i \geqslant 0, \ i = 1,2,3,4,$$

本例的右端常数项均为负数,但

$$c_k - z_k \leqslant 0, \quad k = 1,2,3,4.$$

其中 $\quad c_1 - z_1 = -3, \quad c_2 - z_2 = -1,$

$\quad c_3 - z_3 = 0, \quad c_4 - z_4 = 0.$

对于 $b_2 = -2 < 0$ 有

$$\min\{3/2, \ 1/3\} = 1/3.$$

故选-3 作为主元素,进行行主元素消去法,计算过程见表 6-10-3。最优解为 $\min z = 1, \ x_1 = x_3 = 0, x_2 = x_4 = 1.$

例 1.

$$\min z = x_1 + 3x_2 + 2x_3,$$

表 6-10-3

基底 P_B	C_B	P_j / C / P_0	P_1	P_2	P_3	P_4
			-3	-1	0	0
P_3	0	-1	-1	-1	1	0
P_4	0	-2	-2	(-3)	0	1
		0	-3	-1	0	0
P_4	0	$-1/3$	$-1/3$	0	1	$(-1/3)$
P_2	-1	$2/3$	$2/3$	1	0	$-1/3$
		$-2/3$	$-7/3$	0	0	$(-1/3)$
P_4	0	1	1	0	-3	1
P_2	-1	1	1	1	-1	0
		-1	-2	0	-1	0

表 6-10-4

基底 P_B	C_B	P_j / C / P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
			-1	-3	-2	0	0
P_4	0	8	6	3	-4	1	0
P_5	0	-2	(-3)	-1	3	0	1
		0	-1	-3	-2	0	0
P_4	0	4	0	1	2	1	2
P_1	-1	$2/3$	1	$1/3$	-1	0	$-1/3$
		$-2/3$	0	$-8/3$	-3	0	$-1/3$

表 6-10-5

基底 P_B	C_B	P_0 \ C \ P_j	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
			-1	-2	0	0	0
P_3	0	-6	(-3)	-4	1	0	0
P_4	0	-3	-1	-3	0	1	0
P_5	0	-2	-2	-1	0	0	1
		0	-1	-2	0	0	0
P_1	-1	2	1	4/3	$-1/3$	0	0
P_4	0	-1	0	$(-5/3)$	$-1/3$	1	0
P_5	0	2	0	5/3	$-2/3$	0	1
		-2	0	$-2/3$	$-1/3$	0	0
P_1	-1	6/5	1	0	$-3/5$	4/5	0
P_2	-2	3/5	0	1	1/5	$-3/5$	0
P_5	-1	1	0	0	-1	1	1
		$-12/5$	0	0	$-1/5$	$-2/5$	0

$$\begin{cases}6x_1+3x_2-4x_3\leqslant 8,\\-3x_1-x_2+3x_3\leqslant -2,\end{cases}$$

$$x_1,x_2,x_3\geqslant 0.$$

引进松弛变量 x_4,x_5 得

$$\max\ w=-x_1-3x_2-2x_3,$$

$$\begin{cases}6x_1+3x_2-4x_3+x_4=8,\\-3x_1-x_2+3x_3+x_5=-2,\end{cases}$$

$$x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\geqslant 0.$$

单纯形表、最优解见表 6-10-4.

例 2.

$$\min\ z=x_1+2x_2,$$

$$
\begin{cases}
3x_1 + 4x_2 \geqslant 6, \\
x_1 + 3x_2 \geqslant 3, \\
2x_1 + x_2 \geqslant 2,
\end{cases}
$$

$$x_1, x_2, x_3 \geqslant 0.$$

引进松弛变量 $x_3、x_4、x_5$ 得

$$\max\ w = -x_1 - 2x_2,$$

$$
\begin{cases}
-3x_1 - 4x_2 + x_3 = -6, \\
-x_1 - 3x_2 + x_4 = -3, \\
-2x_1 - x_2 + x_5 = -2,
\end{cases}
$$

$$x_i \geqslant 0, i = 1、2、3、4、5.$$

本例是§10(6)的例.请读者对两种方法作对比。见表 6-10-5，最优解为 $x_1 = 6/5, x_2 = 3/5, x_3 = x_4 = 0, x_5 = 1, \min z = 12/5$。

习　　题

1.利用图解求下列问题的解。

(a) $\max\ z = 2x_1 + x_2$

$$
\begin{cases}
x_1 + 4x_2 \leqslant 32 \\
x_1 + x_2 \leqslant 11 \\
5x_1 + x_2 \leqslant 35
\end{cases}
$$

$$x_1, x_2 \geqslant 0$$

(b) $\max z = x_1 + x_2$

$$
\begin{cases}
4x_1 + 5x_2 \leqslant 10 \\
5x_1 + 2x_2 \leqslant 10 \\
3x_1 + 8x_2 \leqslant 12
\end{cases}
$$

$$x_1、x_2 \geqslant 0$$

(c) $\max\ z = 2x_1 + 2x_2$

$$
\begin{cases}
-x_1 + x_2 \leqslant 1 \\
x_1 + x_2 \leqslant 3
\end{cases}
$$

$$x_1、x_2 \geqslant 0.$$

(d) $\max z = x_1 + x_2$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \leqslant 2 \\ x_1 - x_2 \geqslant 2 \end{cases}$$

$x_1, x_2 \geqslant 0$.

2.利用单纯形法求问题1的解。

3.利用单纯形法求下列问题的解。

(a) $\max z = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leqslant 5 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 \leqslant 11 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leqslant 8 \end{cases}$$

$x_1, x_2, x_3 \geqslant 0$.

(b) $\max z = 5x_1 + 5x_2 + 3x_3$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 \leqslant 3 \\ -x_1 + 3x_3 \leqslant 2 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 \leqslant 4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 \leqslant 2 \end{cases}$$

$x_1, x_2, x_3 \geqslant 0$.

(c) $\max z = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \leqslant 4 \\ 2x_1 + 3x_3 \leqslant 5 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \leqslant 7 \end{cases}$$

$x_1, x_2, x_3 \geqslant 0$.

(d) $\max z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \leqslant 5 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leqslant 3 \end{cases}$$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0$.

4.利用改善的单纯形法求解问题3。

5. $\max z = 3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 2 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 + x_5 = -1 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 = 5 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, \cdots, x_7 \geqslant 0.$$

6. (a)

$$\min z = 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 + x_4 - 2x_5$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 3x_4 - x_5 = 3 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 9x_4 \qquad = 4 \end{cases}$$

$$x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \cdots, 5.$$

(b)

$$\min z = x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} 8x_1 + 5x_2 \geqslant 1 \\ -7x_1 + 4x_2 \leqslant 7 \\ 3x_1 + 8x_2 \leqslant 12 \\ 5x_1 + 2x_2 \leqslant 10 \\ 4x_1 + 5x_2 \leqslant 10 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geqslant 0.$$

(c)

$$\min z = 5x_1 + 3x_2 + 2x_3$$

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 4 \\ -3x_1 + 4x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geqslant 0.$$

7.某工厂生产 P_1, P_2, P_3,P_4 四种产品. 各产品单位利润分别是 100, 20,80,140 元. 设生产这四种产品需要六种原材料 $M_1, M_2, \cdots M_6$. 下列矩阵 $A = (a_{ij})_{4\times6}$,其中 a_{ij} 是 P_i 单位产品需要原材料 M_j 的量。假定现有 $M_1, M_2, \cdots, M_6$ 的数量分别是 1000, 30,20,20, 5,195 单位. 试问如何安排生产. 使利润达到最大.

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 15 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 18 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 21 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

8.有 A,B 两种类型的汽车,分配到 R_1, R_2,R_3 三条路线上去工作. A 型汽车有 40 辆, B型汽车有 30 辆. R_1,R_2,R_3 三条路线的乘客估计分别不少于 300,200,600 位. 已知

$$D = \begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array}\begin{pmatrix} 15 & 40 \\ 20 & 70 \\ 25 & 40 \end{pmatrix}$$
$$\qquad\qquad\quad A \qquad B$$

其中 $C = (C_{ij})_{3\times2}$，$D = (d_{ij})_{3\times2}$.

$C_{ij} = R_i$ 路线上每辆 j 型车的乘客容量。

$d_{ij} =$ 在路线 R_i 上每辆 j 型车的代价。试问应如何安排使代价达到最小。